無限階擬微分作用素の表象理論 (無限階擬微分作用素の解析)

AUTHOR(S):

青木, 貴史

数理解析研究所講究録
468巻 1982年 1-65

無限階擬微分作用素の表象理論

東大 理　青木貴史
AOKI, Takashi

無限階の(擬)微分作用素を解析学において積極的に活用しはじめたのは十年余り前のことである．佐藤超函数論および超局所解析学の比較的初期の段階から無限階の作用素の重要性は認められていたが，とりわけ佐藤幹夫－河合隆裕－柏原正樹[26]は，線型偏(あるいは擬)微分方程式(系)の変換論において無限階の擬微分作用素を用いることによって画期的な成果をあげた．今日，S-K-Kと略称されているこの大論文の主結果は，適当な条件(これはgenericな条件)の下では方程式(系)の“低階項”の影響を消すことができ，その方程式(系)を，特性多様体の幾何学的条件だけから決まる簡単な標準型に変換できる，というもので，このような簡明な結果を得ることは無限階の作用素を用いてはじめて可能となる．最近の柏原－河合による極大過剰決定系の研究[12]や打越敬祐による不確定特異点を持つ偏微分方程式の研究[27],[28](これについては本講究録中の打越氏の論文参照)は

同じ立場からの研究成果といえる。変換の手段として無限階の作用素を用いることによって"不確定特異点"的なものを"確定特異点"的なものに移すことができるのである。以上のような変換論的立場から無限階の作用素を利用することとはやや趣を異とするが，佐藤 [24] は ϑ-函数を無限階微分方程式系の解として研究することを提唱している（本講究録中の河合氏の論文 および [25] 参照）。これらのことから理解できるように，無限階（擬）微分作用素は超越的な対象（微分方程式あるいはその解である函数）の研究に有効な手段である。今後さらにいろいろな分野で有用な役割を果たすことが期待される。

もちろん佐藤超函数論以前にも無限階微分方程式の研究はあった。古くは Ritt [23], Valiron [29] 等，比較的最近では Gruman [8], Martineau [20],[22], Braichev [7] 等。またごく最近では石村 [10] がある。このように数多くの研究があるが，ほとんどすべてが定数係数の場合のみを扱っており（ Khaplanov [17], Korobeinik [18] 等の例外もある）十分研究が進んでいるとはいえない。これらの研究と S-K-K 以後の代数解析学における無限階（擬）微分作用素（あるいは方程式）の研究とは一応独立に進んでいるが，接点を見出せるかどうかは今後の興味のひとつである。

すでに述べたように，無限階の作用素は（線型）微分方程式の変換論において大きな威力を発揮したが，それにひきかえ，それ自身

の一般的研究はほとんど成されなかった．しかし，最近になって，表象理論を活用することにより，ある程度一般的研究ができることがわかってきた．この小論ではまず基本となる表象理論について解説し，ついで表象の満たす指数法則について述べその応用として無限階作用素の可逆性について触れる（[2]~[4]参照）．標題にはじまり，ここまで無限階（擬）微分作用素ということばを用いたが，実際に本論で取扱うのはそれよりももっと広いクラスの作用素で，整型超局所作用素と呼んでいるものであることを，注意しておく．

表象理論の背景について述べよう．ここにいう表象理論は基本的には Boutet de Monvel [5] で与えられている．片岡清臣[13]はそれとは独立に，ほぼ同じものを代数的に定義された，ある環の層 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ の元（それを整型超局所作用素という）の表象として得た．我々は後者の立場をとる．$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ という実体がある為に，前者よりも自然に理論がつくれるからである．この表象理論の有用性は [2]，[28] 等で明らかにされたが，片岡自身が [13] 以外に表象理論を発表しなかったことによって，表象理論のまとまった記述は文献として公表されていない（若干のことは [2] に述べてある）．そこで本小論では，できるだけていねいに表象理論を解説することを心がけた．

本小論の内容は次のようになっている．第1章では上記理由に

より，整型超局所作用素の表象の定義を［13］をもとにして述べる．第2章では表象の無限和を考察するために形式表象の概念を導入する．これにより有限階のものと無限階のものを同時に取扱え，作用素の積の表象などを簡潔に書くことができる．第3章では，$\exp\{p(x,\xi)\}$ という形の表象をもつ作用素について，積，形式共役，座標変換の3つの基本演算を具体的に計算し，その表象がやはり指数函数でかけることを示す．更に，その応用として表象が可逆ならばその表象に対応する作用素は，作用素として可逆であることを若干の条件の下で示す．

本小論の主要結果（第2章の一部と第3章）は本短期共同研究の準備期間中に得られた．このような機会を与えてくださった研究代表者の河合隆裕先生にこの場を借りて深く感謝いたします．また片岡清臣氏は表象理論の基本的な考えを教えてくださった．第1章の大半は，氏の発想に基づいている．その点にとどまらず数多くの助言をくださった氏に心からお礼申し上げます．

第1章　整型超局所作用素とその表象

§1.1. 準備と定義

本節では，我々がこれから研究対象とする $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ 等の代数的な定義をひととおり与えておく．詳しくは S-K-K [26]，柏原 [11]，片岡 [14] 等を参照されたい．*)

X を n 次元複素多様体，$\mathcal{O}_X$ を X 上の正則函数の成す層とする．Y を X の複素部分多様体（余次元 d）とする．Y の X における余法ベクトル束を T^*_YX で表わす．Y を中心とした X の実 comonoidal 変換 $\widetilde{YX}^{\mathbb{R}}$ を $\pi_{Y|X} : (X-Y)\sqcup T^*_YX \longrightarrow X$ と同一視する．T^*_YX 上の層 $C^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ を次で定める．

(1.1) $$C^{\mathbb{R}}_{Y|X} = \mathcal{H}^d_{T^*_YX}(\pi^{-1}_{Y|X}\mathcal{O}_X)^a.$$

ただし $a : T^*_YX \to T^*_YX$ は対極（antipodal）写像である．$C^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ の切断（section）を整型マイクロ函数（holomorphic microfunction）と呼ぶ．$C^{\mathbb{R}}_{Y|X}$ は T^*_YX 上の $\mathbb{R}^+$ の作用による軌道上局所定数層であり，T^*_YX の 0-section 上に制限すると $\mathcal{H}^d_Y(\mathcal{O}_X)$（これを $\mathcal{B}^\infty_{Y|X}$ とかく）と一致する．

---

*) S-K-K において $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}$ は直接定義されてはいない．[14] においては $\mathcal{P}^{\mathbb{R}}$ という記号が用いられている．

さて，X を $X\times X$ の対角線と同一視しよう．このとき，X の余接ベクトル束 T^*X と X の $X\times X$ における余法ベクトル束 $T^*_X(X\times X)$ は第1成分への射影により同一視できる．T^*X 上の層 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ は次で定義される．

$$(1.2) \qquad \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X = \mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X} \underset{p_2^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} p_2^{-1}\Omega^n_X .$$

ただし，Ω^n_X は X 上の整型 n-型式の成す層，$p_2 : X\times X \longrightarrow X$ は第2成分への射影である．$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ の切断を整型超局所作用素（holomorphic microlocal operator）と呼ぶ．単に作用素と略称することもある．整型超局所作用素 P はその定義により $P = K(x,x')dx'$ とかける．ただし $K(x,x')$ は $\mathcal{C}^{\mathbb{R}}_{X|X\times X}$ の切断，即ち整型マイクロ函数である．$K(x,x')$ を P の核函数と呼ぶ．ふたつの作用素 $P_1 = K_1(x,x')dx'$ と $P_2 = K_2(x,x')dx'$ の積（作用素としての結合）を

$$P_1 P_2 = \left(\int K_1(x,x''), K_2(x'',x')dx'' \right) dx'$$

によって定める．ここで積分は，整型マイクロ函数として行なう（cf. S-K-K, Chap II, §1.2）．これにより $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X$ は T^*X 上の環の層となる．もちろん非可換な環である．

$T^*X - T^*_XX$ から余接射影束 $P^*X = (T^*X - T^*_XX)/\mathbb{C}^\times$ への射影を γ とかくとき，T^*X 上の層 $\mathcal{E}^{\infty}_X$ は次によって定義される．

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{\infty}_X |_{T^*X - T^*_X X} = \gamma^{-1}\gamma_* \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X , \\ \mathcal{E}^{\infty}_X |_{T^*_X X} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X |_{T^*_X X} . \end{cases} \tag{1.3}$$

$\mathcal{E}^{\infty}_X$ は（有限階又は無限階*)）擬微分作用素（microdifferential operator）の成す層である．有限階擬微分作用素の成す層は $\mathcal{E}_X$ で表わされる．X 上の微分作用素の層 $\mathcal{D}^{\infty}_X$ は

$$\mathcal{D}^{\infty}_X = \mathcal{B}^{\infty}_{X|X\times X} \underset{p_2^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} p_2^{-1}\Omega^n_X \tag{1.4}$$

によって定義される．有限階微分作用素の成す層を $\mathcal{D}_X$ とかく．(1.3) により $\mathcal{E}^{\infty}_X|_{T^*_X X} = \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X|_{T^*_X X} = \mathcal{D}^{\infty}_X$ である．π を T^*X から X への自然な射影とするとき環の層として

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}\mathcal{D}_X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{E}_X \arrow[d, hook] & \\ \pi^{-1}\mathcal{D}^{\infty}_X \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^{\infty}_X \arrow[r, hook] & \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \end{tikzcd}$$

という自然な包含関係がある．従って，微分作用素，擬微分作用素はすべて整型超局所作用素とみなせる．

注意． S・K・K では $\mathcal{E}^{\infty}_X$，$\mathcal{E}_X$ はそれぞれ $\mathcal{P}_X$，$\mathcal{P}^f_X$ と書かれていたが，最近は $\mathcal{E}^{\infty}_X$，$\mathcal{E}_X$ を用いるのが一般的である．

---

*) 単に（擬）微分作用素という時には，有限階，無限階いずれの場合もありうるとする．特にどちらかを明確にするときにはその場で断わることにする．(擬)微分作用素の階数の定義は S・K・K 参照．

§ 1.2. 正則函数による核の表示

前節で 整型超局所作用素の代数的定義を与えたが，この節では，作用素の核函数を正則函数を用いて具体的に表現するひとつの方法について触れる（S-K-K Chap. II，§ 1.4 による）．

今後特に断わらない限り，X を $\mathbb{C}^n$ の（原点を含む）領域とし，座標 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ をひとつ固定する．このとき

$$T^*X \simeq X\times\mathbb{C}^n \ni x^*=(x,\xi)=(x_1,\cdots,x_n;\xi_1,\cdots,\xi_n)$$

$$TX \simeq X\times\mathbb{C}^n \ni x+v\cdot\frac{\partial}{\partial x} = (x_1,\cdots,x_n;v_1,\cdots,v_n)$$

と同一視される．$(TX)_x \ni v$ と $(T^*X)_x \ni \xi$ $(x\in X)$ の内積は $\mathrm{Re}\langle v,\xi\rangle = \mathrm{Re}(v_1\xi_1+\cdots+v_n\xi_n)$ によって定める．T^*X の一点 $\mathring{x}^*=(\mathring{x},\mathring{\xi})=(0;\lambda,0,\cdots,0)$ $(\lambda\in\mathbb{C})$ を固定し，その錐的近傍で以下議論を行なう．ただし $\Omega\subset T^*X$ が錐的とは $r\geqq 1$ なる任意の r について $r\Omega\subset\Omega$ であることをいう*)．T^*X 内で近傍を考えるときには，すべて錐的近傍であるとし，以後錐的近傍を単に近傍と略す．

$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の $\mathring{x}^*$ における茎 $\mathcal{E}_{\mathring{x}^*}^{\mathbb{R}} = \mathcal{E}_{X,\mathring{x}^*}^{\mathbb{R}}$ を考えよう．もし $\lambda=0$ ならこれは $\mathcal{D}_{\mathring{x}}^{\infty}$ に一致し，微分作用素の核についてはよく知られているので略し，以下 $\lambda\neq 0$ と仮定する．定義により

---

*) $r\Omega=\{(x,r\xi)\mid (x,\xi)\in\Omega\}$．通常錐的であるとは $\forall r>0$ に対し $r\Omega\subset\Omega$ と定義するが，ここではこのように定めておく．

(1.5) $$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathring{x}^*} = \mathcal{H}^n_{T^*X}(\pi^{-1}_{X|X\times X}\,\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X})_{a(\mathring{x}^*)}$$

である. ただし $\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X} = \mathcal{O}_{X\times X} \otimes p_2^{-1}\Omega^n_X$, $a(\mathring{x}^*) = (0;-\lambda,0,\cdots,0)$.

$c>0$, $\varepsilon>0$ なる定数に対して

$$U_c = \{(x,x')\in X\times X \mid |x|<c, |x'|<c\},$$

$$Z_{c,\varepsilon} = \{(x,x')\in U_c \mid \mathrm{Re}\,\lambda(x_1-x_1') \geqq \varepsilon|\mathrm{Im}\,\lambda(x_1-x_1')|,\ |x_1-x_1'| \geqq \varepsilon|x_j-x_j'|,\ j=2,\cdots,n\}$$

とおくと (1.5) の右辺は S-K-K Chap I, Prop. 1.2.3 によって計算でき, 次のようになる. ただし極限は $c\to 0$, $\varepsilon\to 0$ でとる.

(1.6) $$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathring{x}^*} = \varinjlim H^n_{Z_{c,\varepsilon}}(U_c;\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X}).$$

$c,\varepsilon>0$ を固定したとき, 右辺の cohomology を被覆 cohomology で計算しよう. $U_c - Z_{c,\varepsilon}$ は次の様な正則凸な開集合 $V^{(\nu)}$ ($\nu=1,\cdots,n$) によって被覆される.

$$V^{(1)} = V^{(1)}_{c,\varepsilon} = \{(x,x')\in U_c \mid \mathrm{Re}\,\lambda(x_1-x_1') < \varepsilon|\mathrm{Im}\,\lambda(x_1-x_1')|\}$$

$$V^{(\nu)} = V^{(\nu)}_{c,\varepsilon} = \{(x,x')\in U_c \mid |x_1-x_1'| < \varepsilon|x_\nu-x_\nu'|\},\ \nu\geqq 2.$$

そこで

$$V = V_{c,\varepsilon} = \bigcap_{\nu=1}^n V^{(\nu)}, \quad \hat{V}^{(\nu)} = \bigcap_{\mu\neq\nu} V^{(\mu)}$$

とおくと次の exact sequence を得る.

$$\bigoplus_{\nu=1}^n \Gamma(\hat{V}^{(\nu)};\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X}) \to \Gamma(V;\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X}) \to H^n_{Z_{c,\varepsilon}}(U_c;\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X}) \to 0.$$

従って $P = K(x,x')dx' \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathring{x}^*}$ は ($c,\varepsilon>0$ を適当に選んで)

$\Gamma(V;\mathcal{O}_{X\times X}^{(0,n)})$ の元 $\psi(x,x')dx'$ の同値類として表わすことができる。すなわち

$$(1.7)\qquad P = K(x,x')dx' = [\psi(x,x')dx']$$

のように書くことができる。$\psi(x,x')dx'$ を P の定義函数と呼ぶ。

直観的理解を助ける為に，基本的かつ重要な例をあげておく。λ をパラメータにもつ一変数 τ の函数 $\Phi_\lambda(\tau)$ を次で定める。

$$\Phi_\lambda(\tau) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\Gamma(1+\lambda)}{(-\tau)^{\lambda+1}}$$

ただし λ が負整数のときは

$$\Phi_\lambda(\tau) = -\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}(-\lambda-1)!}\tau^{-\lambda-1}\left\{\log\tau-\left(\sum_{\nu=1}^{-\lambda-1}\frac{1}{\nu}-\gamma\right)\right\}$$

と考える。γ は Euler 定数である。$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha')\in\mathbb{C}\times\mathbb{Z}_+^{n-1}$ $(\mathbb{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\})$ とするとき

$$\Phi_\alpha(x-x')dx' = \Phi_{\alpha_1}(x_1-x_1')\cdot\cdots\cdot\Phi_{\alpha_n}(x_n-x_n')dx_1\cdots dx_n$$

は上で行なった考察により，$\mathcal{E}_{\mathring{x}^*}^{\mathbb{R}}$ の元を定める。それを

$$D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1}\cdot\cdots\cdot D_{x_n}^{\alpha_n}$$

とかく。$\alpha_1\in\mathbb{Z}_+$ のときこれは $\mathcal{D}_{\mathring{x}}$ に属し，また α_1 が負整数のときは $\mathcal{E}_{\mathring{x}^*}$ に属する。

具体例は，表象の定義を与えた後でさらに述べることにする（例 2.9 ）。

§ 1.3. Radon 変換による表示

前節では $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ を定める cohomology を具体的に表現する為に $Z = Z_{c,\varepsilon}$ の形を決めてしまい，さらに $U_c - Z_{c,\varepsilon}$ の被覆をひとつ選んで被覆 cohomology を考えた。これらの取り方は他にもいろいろ可能で，有限被覆を考える限り，標準的なものは存在しない。しかし連続無限な被覆を取り，しかも被覆の index を余接ベクトルの座標変数とみなすことによって不変性の高い定式化が可能となる。これがいわゆる Radon 変換である（片岡 [13], [14], Martineau [21] 参照）。本節では Radon 変換を用いて $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の切断を表現することを考える。

まず，W, Y を次によって定める。

$$W = \{(x, \xi, p) \mid x \in X,\ \xi \in \mathbb{C}^n - \{0\},\ p \in \mathbb{C}\},$$

$$Y = \{(x, \xi, p) \in W \mid p = 0\}.$$

$P = K(x, x')dx' \in \mathcal{E}_{\mathring{x}^*}^{\mathbb{R}}$ とする。定義により，$K(x, x')$ は $C_{X|X\times X}^{\mathbb{R}}$ の $\mathring{x}^* = (\mathring{x}, \mathring{\xi}) = (0; \lambda, 0, \cdots, 0)$ （$(\mathring{x}, \mathring{x}, \mathring{\xi}, -\mathring{\xi}) \in T_X^*(X\times X)$ と同一視）のある近傍 Ω における切断である。$\lambda \neq 0$ と仮定しておいたことを思い出しておこう。さて

$$(1.8) \qquad f(x, \xi, p) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n} \int \frac{K(x, x')}{(p - \langle x - x', \xi \rangle)^n} dx'$$

とおく。ただし積分は整型マイクロ函数としてとる。整型マイクロ函数の積および積分の理論（S-K-K, Chap II, Cor. 1.2.3, Prop. 1.2.4）

により $f(x,\xi,p)$ は $C^{\mathbb{R}}_{Y|W}$ の

$$\tilde{\Omega} = \{ (x,\xi,p;\, t\,dp) \in T^*_Y W \mid p=0,\ t>0,\ (x,\xi)\in\Omega \}$$

における切断である. また $f(x,\xi,p)$ は (ξ,p) について $(-n)$ 次斉次である. 逆に, このような f が与えられたとき

(1.9) $$K(x,x') = \int f(x,\xi,\langle x-x',\xi\rangle)\,\omega(\xi)$$

ただし $\omega(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\xi_j\, d\xi_1\wedge\cdots\wedge\widehat{d\xi_j}\wedge\cdots\wedge d\xi_n$

は $C^{\mathbb{R}}_{X|X\times X}$ の切断を与え, (1.8) の逆対応になっている. Y は W の余次元1の部分多様体だから $C^{\mathbb{R}}_{Y|W}$ は簡単に表現できる. 即ち

定理 1.1. (正規化された Radon 変換, [14], Th.3.2.3, Def.3.2.4)
T^*X 上の層 $\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ を次によって定める. 各 $x_0^* = (x_0,\xi_0)\in T^*X$ に対し,

$$\mathcal{J}_{x_0^*} = \{ f(x,\xi,p)\,\omega(\xi) \mid f \text{ は適当な } \varepsilon>0 \text{ に対して } \{(x,\xi,p)\in W \mid |\xi-\xi_0|<\varepsilon,\ |p|<\varepsilon,\ -\mathrm{Re}\,p>0,\ |x-x_0|<\varepsilon\} \text{ で正則かつ } (\xi,p) \text{ について } (-n) \text{ 次斉次} \},$$

$$\mathcal{A}_{x_0^*} = \{ f(x,\xi,p)\,\omega(\xi)\in\mathcal{J}_{x_0^*} \mid f \text{ は } (x,\xi,p)=(x_0,\xi_0,0) \text{ で正則} \}.$$

このとき, 対応 (1.8), (1.9) によって

$$\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_X \simeq (\mathcal{J}/\mathcal{A}) \otimes p_2^{-1}\Omega^n_X \quad (\text{加法同型})$$

となる.

$\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ は座標不変ではないことを注意しておく。定理 1.1 により $P \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ は $\mathcal{J}_{x^*}$ の元 $f(x,\xi,p)\,\omega(\xi)$ の同値類として

$$P = [\,f(x,\xi,p)\,\omega(\xi)\,]\,dx'$$

と書くことができる。($C^{\mathbb{R}}_{Y|W}$ の元とその定義函数を同じ f で表わした。) $f(x,\xi,p)$ を $K(x,x')$ (又は P) の Radon 変換と呼ぶ。

P が前節 (1.7) の様に $\psi(x,x')\,dx' \in \Gamma(V;\mathcal{O}^{(0,n)}_{X\times X})$ によって表現されているとする。このとき、(1.8) を正則函数の積分として

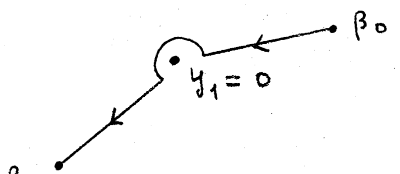
$$f(x,\xi,p) = \frac{(n-1)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy_2 \cdots \oint dy_n \,\frac{\psi(x,x-y)}{(p-\langle y,\xi\rangle)^n} \tag{1.10}$$

と書くことができる。ただし、$\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{C}$ は、絶対値が十分小さく、

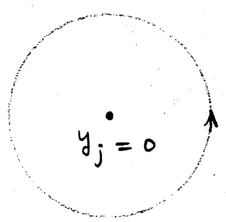
$$0 < \mathrm{Re}\,\lambda\beta_0 < \varepsilon\,\mathrm{Im}\,\lambda\beta_0$$

$$0 < \mathrm{Re}\,\lambda\beta_1 < -\varepsilon\,\mathrm{Im}\,\lambda\beta_1$$

なるものとし、x_1' についての積分路は図 1.1 の如くとる。$\oint dy_j$ は $\{\, y_j \mid |y_j| = \varepsilon^{-1}|y_1| + \delta \,\}$ ($0<\delta\ll 1$) に沿っての周積分を意味する (図 1.2)。(柏原-河合 [12], Chap III 参照)。



(図 1.1)



(図 1.2)

§1.4. 表象

本節では，前節で与えた Radon 変換表示 $f(x,\xi,p)$ をさらに p について Laplace 変換することにより表象を定義する．表象を通じて作用素をとらえると，単に直観的にわかり易いばかりでなく，いろいろな計算も扱い易くなる．

$P\in\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathring{x}^*}$ とする．前節により $P=[f(x,\xi,p)\omega(\xi)]dx'$ と表現できる．ここに $f(x,\xi,p)$ は適当な $c>0$ に対して

$$\{(x,\xi,p)\in W \mid |x-\mathring{x}|<c,\ |\xi-\mathring{\xi}|<c,\ |p|<c,\ \mathrm{Re}\,p<0\}$$

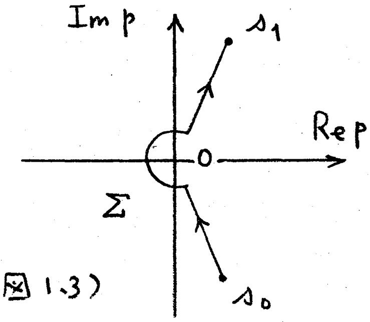
で正則で，かつ (ξ,p) について $(-n)$ 次斉次である．斉次性により，さらに f は適当な $\varepsilon>0$ に対して

$$\{(x,\xi,p)\in W \mid |x-\mathring{x}|<c,\ |\xi-\mathring{\xi}|<c,\ |p|<c,\ \mathrm{Re}\,p<\varepsilon|\mathrm{Im}\,p|\}$$

で正則である．さて，ξ について一次斉次な正則函数 s_0, s_1 を $|\xi-\mathring{\xi}|<c$ ならば $|s_0(\xi)|<c$, $|s_1(\xi)|<c$ かつ

$$0<\mathrm{Re}\,s_0(\xi)<-\varepsilon|\mathrm{Im}\,s_0(\xi)|,$$
$$0<\mathrm{Re}\,s_1(\xi)<\varepsilon|\mathrm{Im}\,s_1(\xi)|$$

となるように選ぶ．$\Sigma=\Sigma(\xi)$ を，s_0 から s_1 に致る図1.3の様な路とし，



(図1.3)

$$(1.11)\qquad P(x,\xi)=(2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\int_{\Sigma(\xi)}f(x,\xi,p)e^{-p}\,dp$$

とおくと

命題 1.2. a) $P(x,\xi)$ は $\mathring{x}^*$ のある(錐的)近傍 Ω で正則で，任意の $\Omega' \ll \Omega$ *)，任意の $h>0$ に対し，ある $C_h>0$ があって，各 $(x,\xi)\in\Omega'$ に対して

$$|P(x,\xi)| \leq C_h \cdot \exp(h|\xi|)$$

が成り立つ.

b) $f \in \mathcal{A}_{\mathring{x}^*}$ すなわち $P=0$ なら任意の $\Omega' \ll \Omega$ に対して定数 $h>0$, $C>0$ が存在して，各 $(x,\xi)\in\Omega'$ に対して

$$|P(x,\xi)| \leq C_h \cdot \exp(-h|\xi|)$$

が成り立つ.

証明 a) (1.11) における積分路 Σ の $\mathrm{Re}\,p<0$ に含まれる部分は，積分の値を変えずにいくらでも小さくできる．すなわち，任意に与えた $h>0$ に対し，

$$\Sigma \subset \{p \mid \mathrm{Re}\,p > -h|\xi|\}$$

とできる．そうしておいて (1.11) の絶対値を評価すればよい.

b) f が $\mathrm{Re}\,p < h'|\xi|$ まで正則であるとすると，やはり Σ を変形して，$\Sigma \subset \{p \mid \mathrm{Re}\,p > h|\xi|\}$ $(0<h<h')$ とできるから，その後で (1.11) を評価すればよい.

---

*) $\Omega' \ll \Omega$ は Ω' が Ω のコンパクト生成部分錐であることを示す.

定義 1.3. Ω を T^*X の錐的開集合とするとき

a) Ω で正則かつ，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$，任意の $h>0$ に対し

$$\sup_{(x,\xi)\in\Omega'} |P(x,\xi)|\, e^{-h|\xi|} < \infty$$

なる $P(x,\xi)$ 全体を $S(\Omega)$ とおく。

b) $P(x,\xi) \in S(\Omega)$ で任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対し，ある $h>0$ があって

$$\sup_{(x,\xi)\in\Omega'} |P(x,\xi)|\, e^{h|\xi|} < \infty$$

なるもの全体を $R(\Omega)$ とおく。

Ω で定義された正則函数 $P(x,\xi)$ は $S(\Omega)$ に属すとき Ω で緩増大である，又は Ω で定義された表象であるという。更に $P(x,\xi)$ は $R(\Omega)$ に属すとき，Ω で急減少である，又は Ω における零表象であるという。

定理 1.4. (1.11) によって定まる対応

$$P = [f(x,\xi,p)\,\omega(\xi)]\, dx' \longmapsto P(x,\xi)$$

によって加法的準同型

$$(1.12) \qquad \sigma : \quad \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*} \longrightarrow \varinjlim_{\Omega \ni x^*} S(\Omega)/R(\Omega)$$

が定まる。σ は s_0, s_1 の選び方によらない。

証明　命題1.2を言いかえただけである．s_0, s_1 の取り方によらないことも明らか．

定義1.5.（[13], §3.3）定理1.4の写像 σ を表象写像という．$P \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ の σ による像（あるいは代表元）$\sigma(P) = P(x, \xi)$ を P の表象（symbol）という．

注意　作用素 P と表象 $P(x, \xi)$ は文字をわけて書くべきであるが文字の節約の為に同じ文字を用いる．そのかわり，表象を表わすときには原則として変数 (x, ξ) を明記する．混乱の恐れのない時は変数を略すこともある．

定理1.4で与えられた表象写像 σ は，実は加法同型となる．それを示す為に σ の逆をつくろう．Ω を $x^* = (\mathring{x}, \mathring{\xi}) = (0; \lambda, 0, \cdots, 0)$ の（錐的）近傍，$P(x, \xi) \in S(\Omega)$ とするとき，$\xi_1 = \lambda$ なる ξ に対して

$$(1.13) \qquad g(x, \xi, p) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int_{R}^{\infty} P(x, \tau\xi)\, e^{\tau p}\, \tau^{n-1}\, d\tau$$

とし，$\xi_1 \neq \lambda$ なる ξ に対しては $g(x, \xi, p)$ が (ξ, p) について $(-n)$ 次斉次であるとして $g(x, \xi, p)$ を定める．ただし $R > 0$ は十分大きな定数である．$P(x, \xi) \longmapsto g(x, \xi, p)\, \omega(\xi)\, dx'$ が σ の逆対応を与える．すなわち次の定理を得る．

定理 1.6.　上で定義された対応により定まる

$$P(x,\xi) \longmapsto [\,g(x,\xi,p)\,\omega(\xi)\,]\,dx'$$

によって加法的準同型

$$(1.14)\qquad \varpi : \varinjlim_{\Omega \ni \mathring{x}^*} \mathcal{S}(\Omega)/R(\Omega) \to \mathcal{J}_{\mathring{x}^*}/\mathcal{A}_{\mathring{x}^*} \simeq \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathring{x}^*}$$

が得られる。ϖ は Λ の取り方によらず，しかも $\varpi\circ\sigma = id$, $\sigma\circ\varpi = id$ となる。

証明　上述の如く定められた $g(x,\xi,p)\,\omega(\xi)$ が $\mathcal{J}_{\mathring{x}^*}$ に属することは明らか。もし $P(x,\xi)$ が Ω で急減少なら $0 < \mathrm{Re}\, p \ll 1$ で積分は収束し，$g(x,\xi,p)\,\omega(\xi) \in \mathcal{A}_{\mathring{x}^*}$ となる。Λ を取りかえたときの差が $\mathcal{A}_{\mathring{x}^*}$ に吸収されることも明らか。　$\varpi\circ\sigma = id$ を示そう。

$$(1.15)\qquad P(x,\xi) = (2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\int_{\Sigma} f(x,\xi,p)\,e^{-p}\,dp$$

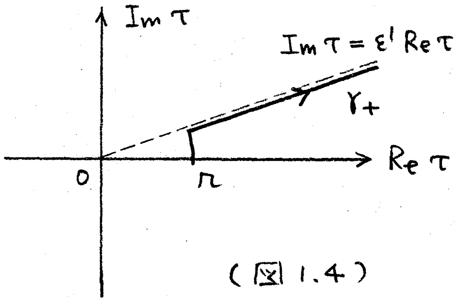
と仮定する。斉次性により　$\varpi\circ\sigma\,|_{\xi_1=\lambda} = id$ を示せば十分である。

$$\begin{aligned} g(x,\xi,p) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Lambda}^{\infty}\int_{\Sigma(\tau\xi)} f(x,\tau\xi,q)\,e^{-q}\,dq\; e^{\tau p}\,\tau^{n-1}\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Lambda}^{\infty}\int_{\Sigma(\xi)} f(x,\xi,q)\,e^{-\tau q}\,dq\; e^{\tau p}\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{\Sigma(\xi)} f(x,\xi,q)\,\frac{e^{(p-q)\Lambda}}{q-p}\,dq \\ &\equiv f(x,\xi,p) \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{A}_{\mathring{x}^*}/\omega(\xi). \end{aligned}$$

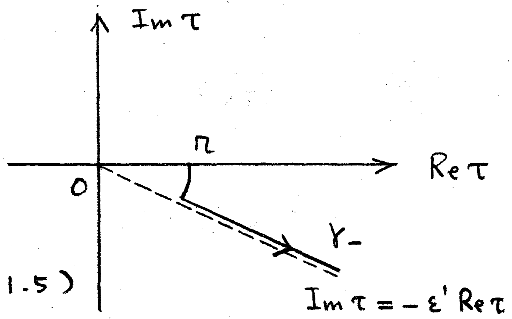
よって $\varpi \circ \sigma = id$ がいえた．次に $\sigma \circ \varpi = id$ を示そう．$P(x, \xi)$ の ϖ による像が $g(x, \xi, p)\,\omega(\xi)\,dx'$ であるとする．ξ が $\mathring{\xi}$ の十分近くにあれば，$\xi_1 \neq 0$ ゆえ

$$(1.16)\qquad g(x, \xi, p) = g\Big(x, \frac{\lambda}{\xi_1}\xi, \frac{\lambda}{\xi_1}p\Big)\cdot\Big(\frac{\lambda}{\xi_1}\Big)^n$$
$$= \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_r^{+\infty} P\Big(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\Big)\, e^{\frac{\tau\lambda}{\xi_1}p}\,\tau^{n-1}\,d\tau\cdot\Big(\frac{\lambda}{\xi_1}\Big)^n.$$

積分は $\mathrm{Re}\,\frac{\lambda}{\xi_1}p < 0$ で広義一様に収束し，正則函数を定義するが，$\varepsilon' > 0$ を十分小さな数とし，下図の如くこの積分の積分路を二通りにずらせることにより，$g(x, \xi, p)$ は $\mathrm{Re}\,p < \varepsilon''|\mathrm{Im}\,p|\quad(0<\varepsilon''\ll 1)$ で正則となる．



(図 1.4)



(図 1.5)

このように $g(x, \xi, p)$ を解析接続しておいて

$$(1.17)\qquad Q(x, \xi) = (2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\int_{\Sigma(\xi)} g(x, \xi, p)\,e^{-p}\,dp$$

とおく．ただし $\Sigma(\xi)$ は g の正則領域に収まるよう適当に取りかえている．これを計算する為には g を上の如く接続しながら代入しなければならない．$\Sigma(\xi) = \Sigma_+ + \Sigma_-$，$\Sigma_\pm = \Sigma \cap \{\mathrm{Im}\,p \gtrless 0\}$ とわけることにより，$\mathrm{Re}\,\tau p < 0\ (\tau \in \gamma_\pm,\ p \in \Sigma_\pm)$ とできるから

$$Q(x,\xi) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Sigma_+} \int_{\gamma_+} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) e^{\frac{\tau\lambda}{\xi_1}p}\, \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^n e^{-p}\, d\tau\, dp$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\Sigma_-} \int_{\gamma_-} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) e^{\frac{\tau\lambda}{\xi_1}p}\, \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^n e^{-p}\, d\tau\, dp$$

となる. これらの積分は絶対収束している. 右辺の第1項を I_+, 第2項を I_- とおく、積分の順序をかえて, 実行すれば

$$I_- = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_+} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^n \frac{e^{s_1(\xi)\cdot\left(\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)}}{\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_+} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^n \frac{e^{p_0\cdot\left(\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)}}{\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\, d\tau$$

$$= I_+^{(1)} - I_+^{(2)}$$

とかける. ただし $p_0 = \Sigma \cap \{\operatorname{Im} p = 0\}$. 同様に

$$I_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_-} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^n \frac{e^{p_0\cdot\left(\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)}}{\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\gamma_-} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^n \frac{e^{s_0(\xi)\left(\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)}}{\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\, d\tau$$

$$= I_-^{(1)} - I_-^{(2)}$$

$I_+^{(1)}$, $I_-^{(2)}$ は γ_+, γ_- の選び方により, $\xi \to \infty$ で急減少となる. ゆえに $I_-^{(1)} - I_+^{(2)}$ のみを考えればよいが,

$$I_-^{(1)} - I_+^{(2)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{-\gamma_+ + \gamma_-} P\left(x, \frac{\tau\lambda}{\xi_1}\xi\right) \tau^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\xi_1}\right)^{n-1} \frac{e^{p_0\left(\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)}}{\tau - \frac{\xi_1}{\lambda}}\, d\tau$$

であり, $\dfrac{e^{p_0\left(\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)}}{\tau - \frac{\xi_1}{\lambda}}$ は減少項つき Cauchy 核だから, $\dfrac{\xi_1}{\lambda}$ が

$-\gamma_+ + \gamma_-$ で囲まれる部分の中にあれば

$$I_-^{(1)} - I_+^{(2)} = P(x,\xi)$$

となる。よって $\sigma \circ \varpi = id$ がいえた。

定義 1.7. $P(x,\xi) \in S(\Omega)$ の ϖ による像 $P \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X^*}$ を表象 $P(x,\xi)$ の 正規積 あるいは Wick 積 と呼び

$$P = :P(x,\xi):$$

で表わす。

注意. この記法は場の量子論から借用した。微分作用素の合成則が自由 Bose 場の演算子の交換関係になっている。もっとも基本的な作用素 x_j, D_j $\left(= \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$, $j=1,\cdots,n$ についていえば、それらの表象は x_j, ξ_j で

$$x_j = :x_j:, \qquad D_j = :\xi_j:,$$
$$x_j D_j = :x_j \xi_j:, \qquad D_j x_j = :x_j \xi_j + 1:$$

などとなっている。なお [2] では $:P(x,\xi):$ のことを $P(x, D_x)$ と書いた。$\varinjlim S(\Omega)/R(\Omega)$ という加群は正則函数のふつうの積から導かれる積によって可換環となる。それが非可換環 $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X^*}$ と加法的に同型なのである。$P(x,\xi)$ が ξ について展開されているときには、ξ をすべて右側に集めて、D_x を代入せよ というのが正規積である。

ところで $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathfrak{X}^*} \ni P$ の Radon 変換 $f(x, \xi, p)$ が (1.10) の如く具体的に正則函数の積分で書かれている場合，その表象はどうなるか考えてみよう.

$$P(x,\xi) = (2\pi\sqrt{-1})^{n-1} \int_{\Sigma} f(x,\xi,p)\, e^{-p}\, dp$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy_2 \cdots \oint dy_n \int_{\Sigma} \frac{\psi(x, x-y)\, e^{-p}}{(p - \langle y, \xi\rangle)^n}\, dp$$

$$= (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy_2 \cdots \oint dy_n\, \psi(x, x-y)\, e^{-\langle y, \xi\rangle}$$

この計算は modulo $\mathcal{R}(\Omega)$ でいみがある. よって

<u>命題 1.8.</u>　$P \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{\mathfrak{X}^*}$ が $\psi(x, x') \in \mathcal{O}(V_{c,\varepsilon})$ (cf. §1.2) によって　$P = [\psi(x, x')\, dx']$ と表わされているときその表象は

$$(1.18)\quad P(x,\xi) = (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy_2 \cdots \oint dy_n\, \psi(x, x-y)\, e^{-\langle y, \xi\rangle}$$

によって計算できる. ただし積分路は §1.3，図 1.1, 1.2 の如くとる.

上で得られた $P(x,\xi)$ は β_0, β_1 を有限な値にとる限り ξ について整函数となる. ξ の十分小さい近傍で緩増大となることはすでに述べたが，他の方向については定め方から ξ について指数型となっている.

有限階の(擬)微分作用素に対しては階数が定義された。それに対応するものを考えよう。

定義 1.9. $P(x,\xi)$ を T^*X の錐的開集合 Ω で定義された表象，m を実数とする。任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して $P(x,\xi)|\xi|^{-m}$ が Ω' にて有界である（resp. 任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対して $(x,\xi)\in\Omega'$, $|\xi|\to\infty$ のとき $P(x,\xi)|\xi|^{-m}\to 0$ である）とき，$P(x,\xi)$ は Ω において高々 m 階（resp. 高々 $m-0$ 階）という。

上の定義の条件をみたす m が存在しないとき $P(x,\xi)$ は Ω において無限階であるという。無限階の場合は，表象の対数がどれぐらいの階数かでクラス分けする。

定義 1.10 $P(x,\xi)$ を T^*X の錐的開集合 Ω で定義された表象，ρ を $0\le\rho<1$ （resp. $0<\rho\le 1$）なる実数とする。任意の $\Omega'\Subset\Omega$ に対して $h>0$, $C>0$ なる定数が存在し（resp. 任意の $\Omega'\Subset\Omega$, $h>0$ に対し $C>0$ なる定数が存在し）

$$|P(x,\xi)| \le C\exp(h|\xi|^{\rho}),\quad (x,\xi)\in\Omega'$$

をみたすとき $P(x,\xi)$ は Ω において増大度高々 ρ （resp. $\rho-0$）という。

第2章　形式表象とその応用

§ 2.1. 形式表象

前章では整型超局所作用素の表象を定義したが，作用素の無限和を考えるとき，前章の議論だけでは不便である．正則函数としては発散するような表象の級数を考える必要があるからである．そこで形式表象というものを導入する（[3],[4]）．これは，Boutet de Monvel [5] によって定義されたもの（片岡も同様の概念を得ていたが，[13] における記述は不十分である．[2] も参照）の一般化になっている．X，$\mathring{X}^*$ 等の記号は前章と同じとする．

定義 2.1.　Ω を $\mathring{X}^*$ の近傍，$\{P_j(x,\xi)\}_{j=0}^{\infty}$ を Ω で定義された表象の列（すなわち，各 $P_j(x,\xi)\in S(\Omega)$）で，任意のコンパクト生成部分錐 $\Omega'\Subset\Omega$ に対して $r>0$，$0<A<1$ なる定数 r，A が存在し，各 $h>0$ に対し，$C>0$ を適当に選べば各 $j=0,1,2,\cdots$，および $|\xi|\geq(j+1)r$ をみたす任意の $(x,\xi)\in\Omega'$ について

$$(2.1)\qquad |P_j(x,\xi)|\leq C A^j \exp(h|\xi|)$$

をみたすものとする．このとき t についての形式的べき級数

$$(2.2)\qquad P(t;x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$$

は Ω で定義された形式表象 (formal symbol) であるという. Ω で定義された形式表象の全体を $\hat{S}(\Omega)$ で表わす.

t についての形式的べキ級数としての和, 積によって $\hat{S}(\Omega)$は可換環となる. 前節で定義された $S(\Omega)$ を $\hat{S}(\Omega)$ の部分環 $\hat{S}(\Omega)|_{t=0}$ と同一視する. 時として $\sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$ の t を略して $\sum_{j=0}^{\infty} P_j(x,\xi)$ と書くことがある.

<u>定義 2.2.</u> $P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$ を Ω で定義された形式表象とする. 各 $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して $r>0$, $0<A<1$ なる定数 r, A が存在し, 任意の $h>0$ に対して $C>0$ を適当に選べば, 任意の $m=1,2,\cdots$ と $|\xi| \geq mr$ なる各 $(x,\xi) \in \Omega'$ について

$$(2.3) \qquad \left| \sum_{j=0}^{m-1} P_j(x,\xi) \right| \leq C A^m \exp(h|\xi|)$$

をみたすとき $P(t;x,\xi)$は Ω で 0 と同値であるといい $P(t;x,\xi) \sim 0$ と記す. Ω で定義された形式表象で 0 と同値なもの全体を $\hat{R}(\Omega)$ で表わす.

ふたつの形式表象 $P(t;x,\xi)$, $Q(t;x,\xi) \in \hat{S}(\Omega)$ はその差が $\hat{R}(\Omega)$ に属するとき同値であるといい $P(t;x,\xi) \sim Q(t;x,\xi)$ とかく. もちろんこれは同値関係である.

命題 2.3. $\hat{R}(\Omega)$ は $\hat{S}(\Omega)$ のイデアルである.

証明 $\hat{R}(\Omega)$ が $\hat{S}(\Omega)$ の加法部分群であることは明らかだから $P(t;x,\xi) = \sum t^j P_j(x,\xi) \in \hat{R}(\Omega)$, $Q(t;x,\xi) = \sum t^k Q_k(x,\xi) \in S(\Omega)$ のとき $P(t;x,\xi)Q(t;x,\xi) \in \hat{R}(\Omega)$ を示せばよい. 任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対し, 定数 $r>0$, $0<A<1$ があって各 $h>0$ に対し $C>0$ が存在し, 任意の $j=0,1,2,\cdots$, $m=1,2,\cdots$, $k=0,1,2,\cdots$ について

$$(2.4)\quad \begin{cases} |P_j(x,\xi)| \leq CA^j \exp(h|\xi|), & |\xi| \geq (j+1)r, \\ |\sum_{j=0}^{m-1} P_j(x,\xi)| \leq CA^m \exp(h|\xi|), & |\xi| \geq mr, \\ |Q_k(x,\xi)| \leq CA^k \exp(h|\xi|), & |\xi| \geq (k+1)r \end{cases}$$

$((x,\xi) \in \Omega')$ であると仮定してよい.

$$W(t;x,\xi) = P(t;x,\xi)Q(t;x,\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} t^l W_l(x,\xi)$$

とすると $W_l(x,\xi) = \sum_{j+k=l} P_j(x,\xi)Q_k(x,\xi)$ であるから $W(t;x,\xi)$ が $\hat{R}(\Omega)$ に属することをいう為には $|\sum_{l=0}^{m-1} W_l(x,\xi)|$ を各 $m=1,2,\cdots$ について評価すればよい. (2.4) により $|\xi| \geq mr$ なる $(x,\xi) \in \Omega'$ に対し

$$|\sum_{l=0}^{m-1} W_l(x,\xi)| = |\sum_{l=0}^{m-1} \sum_{j+k=l} P_j(x,\xi)Q_k(x,\xi)|$$

$$\leq |\sum_{j=0}^{m-1} P_j(x,\xi) \sum_{k=0}^{m-1} Q_k(x,\xi)| + |\sum_{l=m}^{2m-2} \sum_{\substack{j+k=l \\ j,k \leq m-1}} P_j(x,\xi)Q_k(x,\xi)|$$

$$\leq \frac{C^2}{1-A} A^m \exp(2h|\xi|) + C^2 A^m \sum_{\ell=0}^{m-2} (\ell+m+1) A^\ell \exp(2h|\xi|)$$

$0<A<1$ だから　$0<A<B<1$ なる B を選べ，$C' = C'_h > 0$ を十分大きくとれば上式は　$C' B^m \exp(2h|\xi|)$ でおさえられる．よって　$W(t;x,\xi) \sim 0$ がいえた．

形式表象　$P(t;x,\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$ に対して作用素の和 $\sum_{j=0}^{\infty} :P_j(x,\xi):$ にあたるものを考えたい．$\mathcal{D}_X^\infty$，$\mathcal{E}_X^\infty$ では D_x に関する斉次成分への一意的な展開ができたが，$\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ ではそのような都合のよい展開は一般には存在しない．しかし，形式表象を modulo $\hat{R}(\Omega)$ で考えることによって作用素の無限和が取扱えるのである．本質的には Boutet de Monvel [5] による次の命題は，これらの考察において基本的である．

<u>命題 2.4.</u>　$P(x,\xi)$ を Ω で定義された表象とする．このとき，Ω において $P(x,\xi) \sim 0$ であることと　$P(x,\xi) \in R(\Omega)$ であることとは同値．

<u>証明</u>　Ω で $P(x,\xi) \sim 0$ であれば任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対し，$r>0$, $0<A<1$ なる定数 r, A が存在して各 $h>0$ について　$C>0$ を適当に選べば各 $m=1,2,\cdots$，および　$|\xi| \geq mr$ なる $(x,\xi) \in \Omega'$ に対して

$$|P(x,\xi)| \leq C A^m \exp(h|\xi|)$$

とできる. そこで ξ を固定したとき, $m = (\frac{|\xi|}{n}$ の整数部分$)$ とすれば

$$|P(x,\xi)| \leq C A^{\frac{|\xi|}{n}-1} \exp(h|\xi|).$$

ところで $A^{\frac{|\xi|}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\log A \cdot |\xi|)$ である. $0<A<1$ ゆえ, $h>0$ を $h+\frac{1}{n}\log A<0$ に選べる. よってある $h'>0$, $C'>0$ があって

$$|P(x,\xi)| \leq C' \exp(-h'|\xi|)$$

であることがわかった. ゆえに $P(x,\xi) \in R(\Omega)$.

逆に, $P(x,\xi) \in R(\Omega)$ とすると $C>0$, $h>0$ が存在して

$$|P(x,\xi)| \leq C \cdot \exp(-h|\xi|), \qquad (x,\xi) \in \Omega'.$$

$$\exp(-h|\xi|) = |\xi|^{-m}|\xi|^m \exp(-h|\xi|) \leq m!\,(\tfrac{1}{h})^m |\xi|^{-m} \quad (m \geq 1)$$

だから $n \geq \frac{1}{h}$ とすれば $|\xi| \geq mn$ のとき

$$|P(x,\xi)| \leq m! \cdot \frac{1}{m^m}.$$

Stirling の公式 $\quad m! \leq m^m e^{-m+\frac{1}{12m}}\sqrt{2\pi m}\quad$ によって $P(x,\xi) \in \hat{R}(\Omega)$ であることがわかる.

上の命題によってうめこみ $S(\Omega) \to \hat{S}(\Omega)$ から準同型 $S(\Omega)/R(\Omega) \to \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega)$ が導かれることがわかった. さらに

定理 2.5.　$\mathring{x}^* \in T^*X$ の近傍 Ω で定義された各形式表象 $P(t;x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x,\xi)$ に対して，$\mathring{x}^*$ の近傍 $\Omega_1 \subset \Omega$ および Ω_1 で定義された表象 $P(x,\xi)$ で Ω_1 にて

$$P(x,\xi) \sim P(t;x,\xi)$$

となるものが存在する.

証明　$\{P_k(x,\xi)\}$ は定義 2.1 で与えた評価 (2.1) をみたすとする. $\xi_1 = \lambda$ なる ξ に対して

$$(2.5) \qquad f_k(x,\xi,p) = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{(k+1)\eta}^{\infty} P_k(x,\tau\xi)\, e^{p\tau}\, \tau^{n-1}\, d\tau$$

とおき，$\xi_1 \neq \lambda$ なるときは (ξ,p) について f_k が $(-n)$ 次斉次であるとして拡張すれば各 $k=0,1,2,\cdots$ に対し $f_k(x,\xi,p)\omega(\xi) \in \mathcal{J}_{\mathring{x}^*}$ であり，かつ定理 1.6 により $\varpi(P_k(x,\xi)) = f_k(x,\xi,p)\,\omega(\xi)\,dx'$ である. (2.5) において $(k+1)^{-1}\tau$ を改めて τ とかけば

$$(2.6) \qquad f_k(x,\xi,p) = \frac{(k+1)^n}{(2\pi\sqrt{-1})^n}\int_{\eta}^{\infty} P_k(x,(k+1)\tau\xi)\, e^{(k+1)p\tau}\, \tau^{n-1}\, d\tau$$

となる. $f_k(x,\xi,p)\omega(\xi) \in \mathcal{J}_{\mathring{x}^*}$ に対応する表象を $\tilde{P}_k(x,\xi)$ とする.

$$(2.7) \qquad \tilde{P}_k(x,\xi) = (2\pi\sqrt{-1})^{n-1}\int_{\Sigma} f_k(x,\xi,p)\, e^{-p}\, dp.$$

定理 1.6 により $\tilde{P}_k(x,\xi)$ は $\mathring{x}^*$ のある近傍 Ω_1 で定義された表象で，そこにおいてもとの $P_k(x,\xi)$ と同値である ($k=0,1,2,\cdots$).　さらに

$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(x,\xi)$ は Ω_1 で広義一様に絶対収束する。実際，(2.1) を仮定しているから $\xi_1 = \lambda$ なる ξ に対して (2.6) により

$$|f_k(x,\xi,p)| \le \frac{(k+1)^n}{(2\pi)^n}\int_r^{\infty} C_h A^k \exp\{(k+1)\tau(h|\xi|+\mathrm{Re}\,p)\}\tau^{n-1}d\tau$$

と評価できるが，$h|\xi|+\mathrm{Re}\,p<0$ なるはんいでこれは更に

$$|f_k(x,\xi,p)| \le C_h' A^k \frac{1}{|r(h|\xi|+\mathrm{Re}\,p)|^n}\exp\{(k+1)r(h|\xi|+\mathrm{Re}\,p)\}$$

となる。ただし C_h' は h による定数。この評価は，(2.6) の積分路を定理 1.6 の証明における（図 1.4, 1.5 参照）ように変形しても成り立ち，$\tilde{P}_k(x,\xi)$ を定める積分 (2.7) は f_k を斉次性により拡張したものの有限なはんいでの積分だから結局 $C_h''>0$ を十分大きくとれば

$$|\tilde{P}_k(x,\xi)| \le C_h'' A^k \exp(h|\xi|)$$

という評価を得ることができ，$\sum_{k=0}^{\infty} t^k \tilde{P}_k(x,\xi)$ は形式表象であるばかりでなく，$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(x,\xi)$ 自身が Ω_1 で広義一様に絶対収束（ただし $|\xi|\ge r'$；$r'\gg 1$ は定数）することがわかる。そこで

$$P(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(x,\xi)$$

とおくと，$P(x,\xi)$ は明らかに Ω_1 で定義された表象となる。しかも，そこで $P(x,\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} t^k \tilde{P}_k(x,\xi)$ である。何故なら任意の $\Omega_1' \subset\subset \Omega_1$ に対し，上で得た評価から各 $m=1,2,\cdots$，$(x,\xi)\in\Omega_1'$ について

$$
\begin{aligned}
&| P(x,\xi) - \sum_{k=0}^{m-1} \tilde{P}_k(x,\xi) | \\
&= | \sum_{k=m}^{\infty} \tilde{P}_k(x,\xi) | \\
&\leq \quad C_h'' \frac{1}{1-A} \cdot A^m \exp(h|\xi|)
\end{aligned}
$$

となるからである。　従ってあとは $\sum t^k P_k(x,\xi) \sim \sum t^k \tilde{P}_k(x,\xi)$ をいえば定理が示される。これをいう為に、やはり定理1.6の証明の様に、(2.6)の積分路をかえて、$f_k(x,\xi,p)$を接続しつつ(2.7)に代入する。すなわち、$\gamma_\pm$を図1.4, 1.5（定理1.6）の如き路、$\Sigma_\pm = \Sigma \cap \{ \operatorname{Im} p \gtrless 0 \}$, $p_0 = \Sigma \cap \{ \operatorname{Im} p = 0 \}$とする。$\tau \in \gamma_\pm$, $p \in \Sigma_\pm$なら $\operatorname{Re} \tau p < 0$ とできるから

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_k(x,\xi) &= (2\pi\sqrt{-1})^{n-1} \int_{\Sigma_- + \Sigma_+} f_k(x,\xi,p)\, e^{-p}\, dp \\
&= (2\pi\sqrt{-1})^{n-1} \int_{\Sigma_- + \Sigma_+} f_k(x, \frac{\lambda}{\xi_1}\xi, \frac{\lambda}{\xi_1}p)\, e^{-p}\, dp \cdot (\frac{\lambda}{\xi_1})^n \\
&= \frac{(k+1)^n}{2\pi\sqrt{-1}} \cdot (\frac{\lambda}{\xi_1})^n \Big(\int_{\Sigma_-} dp \int_{\gamma_-} d\tau + \int_{\Sigma_+} dp \int_{\gamma_+} d\tau \Big) P_k(x, \frac{(k+1)\lambda\tau}{\xi_1}\xi)\, e^{(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}p\tau - p}\, \tau^{n-1}.
\end{aligned}
$$

となる。　$I_\pm = \int_{\Sigma_\pm} \int_{\gamma_\pm}$ とおいて順序をかえて積分を実行すると

$$
\begin{aligned}
I_- &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Big(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\Big)^n \int_{\gamma_-} P_k(x, \frac{(k+1)\lambda\tau}{\xi_1}\xi)\, \frac{e^{(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\tau - 1)p_0}}{(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\, \tau^{n-1}\, d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \Big(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\Big)^n \int_{\gamma_-} P_k(x, \frac{(k+1)\lambda\tau}{\xi_1}\xi)\, \frac{e^{(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\tau - 1)\lambda_0}}{(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\, \tau^{n-1}\, d\tau
\end{aligned}
$$

これを $I_-^{(1)} - I_-^{(1)}$ とおく．同様に

$$I_+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\right)^n \int_{\gamma_+} P_k\left(x, \frac{(k+1)\lambda\tau}{\xi_1}\xi\right) \frac{e^{\left(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)s_1}}{(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\tau^{n-1}d\tau$$

$$- \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\right)^n \int_{\gamma_+} P_k\left(x, \frac{(k+1)\lambda\tau}{\xi_1}\xi\right) \frac{e^{\left(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)p_0}}{(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}\tau^{n-1}d\tau$$

$$= I_+^{(1)} - I_+^{(2)}$$

とおく．$I_-^{(1)} - I_+^{(2)} = \int_{\gamma_-} - \int_{\gamma_+} = \int_{\gamma_+ - \gamma_-}$ で $\dfrac{e^{\left(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)p_0}}{(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1}$

は減少項つき Cauchy 核（の定数倍）であるから，(x, ξ) が路 $\gamma_+ - \gamma_-$ の中にあれば $I_-^{(1)} - I_+^{(2)} = P_k(x, \xi)$ となる．よって (x, ξ) が z^* の十分小さな近傍内にあり，かつ $|\xi| > (k+1)r''$ $(r'' \gg 1)$ ならば

$$P_k(x, \xi) - \tilde{P}_k(x, \xi) = I_-^{(2)} - I_+^{(1)}$$

となる．ところが s_0, s_1 は ξ について一次斉次であったことに注意すると

$$|I_-^{(2)}| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\right|^n \int_{\gamma_-} C_h \cdot A^k \times \frac{e^{h\left|\frac{(k+1)\lambda\tau}{\xi_1}|\xi|\right| + \mathrm{Re}\left(\frac{(k+1)\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right)s_0}}{\left|(k+1)\frac{\lambda}{\xi_1}\tau - 1\right|}|\tau|^{n-1}|d\tau|$$

から，$C_0 > 0$，$h' > 0$ が存在して $|I_-^{(2)}| \leq C_0 (k+1)^n A^k \exp(-h'|\xi|)$ であることがわかる．$|I_+^{(1)}|$ についても同様．よって $C > 0$，$h > 0$ があって

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}(P_k(x, \xi) - \tilde{P}_k(x, \xi))\right| \leq C \exp(-h|\xi|)$$

が各 m と $|\xi| \geq mr''$ について成り立つことがいえ，定理が示された．

上で構成した $P(x,\xi)$ は, $\mathrm{mod}\ R(\Omega_1)$ で Ω の取り方に依らない. 以上まとめて

定理 2.6. $\hat{\iota} : \varinjlim \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \varinjlim S(\Omega)/R(\Omega)$ なる環同型が存在する.

これと定理 1.6 をあわせると

定理 2.7. $\hat{\varpi} = \varpi \circ \hat{\iota}$ とおくと

$$\hat{\varpi} : \varinjlim \hat{S}(\Omega)/\hat{R}(\Omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$$

は加法同型である.

定義 2.8. Ω で定義された形式表象 $P(t;x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x,\xi)$ の $\hat{\varpi}$ による像 $P \in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ を

$$P = {:}P(t;x,\xi){:} = {:}\sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x,\xi){:}$$

で表わし, これを $P(t;x,\xi)$ の正規積あるいは Wick 積と呼ぶ.

注意. 混乱の恐れがないとき ${:}\sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x,\xi){:}$ を単に ${:}\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x,\xi){:}$ と略記することがある. 定義 2.8 はもちろん定義 1.7 と矛盾しない.

<u>例 2.9.</u> 形式表象とそれに同等な表象の例をいくつかあげる. すべて一変数で考え, $\xi_1 = \xi$ とかく.

a) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j 2^{-j} \sim 2$. くだらない例であるが [2], [5] の意味では形式表象とはならないことに注意.

b) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j \xi^{-j} \sim \frac{\xi}{\xi-1} \sim \frac{\xi}{\xi-1}(1-e^{1-\xi})$. 後者の同値は $\mathrm{Re}\,\xi>0$ において. また後者は整函数である.

c) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j j!(-\xi)^j \sim \varphi(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{\xi-s}\frac{\xi}{s}\,ds$, $\mathrm{Re}\,\xi>0$.

d) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j \frac{1}{j!}\xi^{\frac{j}{2}} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\xi^{\frac{j}{2}} = e^{\sqrt{\xi}}$.

これらの例からもわかるように, 形式表象は有限階のものと無限階のものを同時に含んでいる. これが利点である. 形式表象の応用例として和の順序交換に関する定理をひとつあげておく. 証明は演習問題とする.

<u>定理 2.10.</u> $\{P_{ij}(x,\xi)\}_{i,j=0,1,2,\cdots}$ を Ω で定義された表象の二重列とする. 任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対し定数 $R>0$, $0<A<1$ があって各 $h>0$ に対し $C_h>0$ を適当に選べば各 i,j につき

$$|P_{ij}(x,\xi)| \le C_h A^{i+j}\exp(h|\xi|), \quad (x,\xi)\in\Omega', |\xi|\ge(i+j)R$$

であるとする. このとき $P_j(x,\xi) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}(x,\xi)$ (これは収束する), および $Q_k(x,\xi) = \displaystyle\sum_{i+j=k} P_{ij}(x,\xi)$ とおくと $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} t^j P_j(x,\xi)$ と $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} t^k Q_k(x,\xi)$ は同値な形式表象となる.

§ 2.2. $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ における基本演算と形式表象

形式表象を用いれば $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ における積(作用素としての結合)などの演算を簡潔に書くことができる。前節までと同様、Ω を $x^* \in T^*X$ の(錐的)近傍とする。まず次の補題を示しておく。

<u>補題 2.11.</u> $M = (a_{ij})$ を $n \times n$ 行列 ($a_{ij} \in \mathbb{C}$) とする。$P(t; x, \xi) \in \hat{S}(\Omega)$ なら $\exp(t \partial_\xi \cdot M \partial_x) P(t; x, \xi) \in \hat{S}(\Omega)$ である。更に $P(t; x, \xi) \sim 0$ なら $\exp(t \partial_\xi \cdot M \partial_x) P(t; x, \xi) \sim 0$ となる。ただし $\exp(t \partial_\xi \cdot M \partial_x) = \exp(t \sum_{i,j} a_{ij} \partial_{\xi_i} \partial_{x_j})$.

<u>証明</u> $M = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ の場合に示せば十分である。

$$P(t; x, \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k(x, \xi)$$

を Ω で定義された形式表象とする。定義 2.1 の評価 (2.1) を仮定する。

$$\exp(t \partial_{\xi_1} \partial_{x_1}) P(t; x, \xi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^l}{l!} \sum_{k=0}^{\infty} t^k \partial_{\xi_1}^l \partial_{x_1}^l P_k(x, \xi)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} t^j \sum_{k+l=j} \frac{1}{l!} \partial_{\xi_1}^l \partial_{x_1}^l P_k(x, \xi)$$

である。Cauchy の積分公式により

$$\partial_{\xi_1}^l \partial_{x_1}^l P_k(x, \xi) = \frac{l!^2}{(2\pi\sqrt{-1})^2} \iint \frac{P_k(z, x', \zeta, \xi')}{(\zeta - \xi_1)^{l+1} (z - x_1)^{l+1}} dz\, d\zeta$$

ただし $x'=(x_2,\cdots,x_n)$, $\xi'=(\xi_2,\cdots,\xi_n)$, 積分路は z については $|z-x_1|=\varepsilon>0$, ζ については $P_k(x,\xi)$ が錐的な Ω で正則であることから $|\zeta-\xi_1|=\varepsilon|\xi|$ (ε 十分小) ととれる。 (x,ξ) は $\Omega''\subset\subset\Omega'$ ($\Omega'\subset\subset\Omega$ は評価(2.1)における Ω') において考えている。 よって

$$
\begin{aligned}
|\partial_{\xi_1}^{\ell}\partial_{x_1}^{\ell}P_k(x,\xi)| &\leq \ell!^2|\xi|^{-\ell}\varepsilon^{-2\ell}\sup_{z,\zeta}|P_k(z,x',\zeta,\xi')| \\
&\leq \ell!^2|\xi|^{-\ell}\varepsilon^{-2\ell}C_h' A^k \exp(h|\xi|)
\end{aligned}
$$

ここに $C_h'>0$ は定数で $C_{\frac{h}{1+\varepsilon}}$ 程度にとれる。 この評価により

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{k+\ell=j}\frac{1}{\ell!}\partial_{\xi_1}^{\ell}\partial_{x_1}^{\ell}P_k(x,\xi)\Big| \\
&\leq \sum_{k+\ell=j}\ell!|\xi|^{-\ell}\varepsilon^{-2\ell}C_h' A^k\exp(h|\xi|) \\
&\leq \sum_{k+\ell=j}\ell!\frac{1}{(j+1)^{\ell}}\frac{\varepsilon^{-2\ell}}{R^{\ell}}C_h' A^k\exp(h|\xi|)
\end{aligned}
$$

ただし $(x,\xi)\in\Omega''$, $|\xi|\geq(j+1)R$. よって $R>0$ を十分大きくとれば これは $C_h'' A^j\exp(h|\xi|)$ ($C_h''>0$ は h による定数) で評価できる. ゆえに $\exp(t\partial_{\xi_1}\partial_{x_1})P(t:x,\xi)\in\hat{S}(\Omega')$. $\Omega'\subset\subset\Omega$ は任意. だから $\hat{S}(\Omega)$ にも属す.

次に $P(t:x,\xi)\sim 0$ とする. 定義 2.2 の評価(2.3)を仮定してよい. このとき ($R>0$ は十分大としてよいから)

$$
\Big|\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k+\ell=j}\frac{1}{\ell!}\partial_{\xi_1}^{\ell}\partial_{x_1}^{\ell}P_k(x,\xi)\Big|
$$

$$\leq \sum_{l=0}^{m-1} \frac{1}{l!} \left| \partial_{\xi_1}^{l} \partial_{x_1}^{l} \sum_{k=0}^{m-1-l} P_k(x, \xi) \right|$$

$$\leq C_h' \sum_{l=0}^{m-1} l! \, \varepsilon^{-2l} |\xi|^{-l} A^{m-l} \exp(h|\xi|)$$

$$\leq C_h''' A^m \exp(h|\xi|), \quad m = 1, 2, \cdots, \quad |\xi| \geq m r$$

ただし $C_h''' > 0$ は定数. よって $\exp(t\,\partial_{\xi_1} \partial_{x_1}) P(t; x, \xi) \sim 0$.

さて, $\mathcal{E}_X^{\mathbb{R}}$ の中での三つの基本的演算である積, 形式共役それに座標変換を形式表象を用いて表わそう.

定理 2.12. (積; Leibniz の法則) $P(t; x, \xi)$, $Q(t; x, \xi)$ をともに Ω で定義された形式表象とする.

$$(2.8) \quad W(t; x, \xi) = \exp(t\,\partial_\xi \cdot \partial_y) P(t; x, \xi) Q(t; y, \eta) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}}$$

とおくと $W(t; x, \xi)$ は Ω で定義された形式表象で

$$:P(t; x, \xi):: Q(t; x, \xi): = :W(t; x, \xi):$$

ただし 左辺は ふたつの作用素 $:P(t; x, \xi):$ と $:Q(t; x, \xi):$ の $\mathcal{E}_{X^*}^{\mathbb{R}}$ における積を表わす.

注意. $P(t; x, \xi) = \sum t^j P_j(x, \xi)$ などとおいてみれば これがよく知られた擬微分作用素の結合則 (Leibniz 則) と形式的に同じことがわかる.

証明　$P^{(1)}(x,\xi)$, $Q^{(1)}(x,\xi)$ を それぞれ $P(t;x,\xi)$, $Q(t;x,\xi)$ と同等な表象とする（定理 2.5 によりその存在は保証されている）.

$$W^{(1)}(t;x,\xi) = \exp(t\,\partial_\xi \cdot \partial_y)\, P^{(1)}(x,\xi)\, Q^{(1)}(y,\eta)\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}$$

とおくと 補題 2.11 によって $W(t;x,\xi) \sim W^{(1)}(t;x,\xi)$ となるから

$$:P^{(1)}(x,\xi)::Q^{(1)}(x,\xi): = :W^{(1)}(t;x,\xi):$$

を示せば十分である。そこで $:P^{(1)}(x,\xi):$, $:Q^{(1)}(x,\xi):$ の核函数およびその Radon 変換をそれぞれ $K(x,x')$, $L(x,x')$ および $f(x,\xi,p)$, $g(x,\xi,p)$ とする。整型マイクロ函数として

$$f(x,\xi,p) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int \frac{K(x,x')}{(p-\langle x-x',\xi\rangle)^n}\,dx',$$

$$g(x,\xi,p) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int \frac{L(x,x')}{(p-\langle x-x',\xi\rangle)^n}\,dx'$$

である。$:P^{(1)}(x,\xi):$ と $:Q^{(1)}(x,\xi):$ の積の核函数は

$$H(x,x') = \int K(x,x'')L(x'',x')\,dx''$$

で与えられるから その Radon 変換を $h(x,\xi,p)$ とすると

$$(2.9)\quad h(x,\xi,p) = \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\int \frac{H(x,x')}{(p-\langle x-x',\xi\rangle)^n}\,dx'$$

$$= \frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\iint \frac{K(x,x'')L(x'',x')}{(p-\langle x-x'',\xi\rangle-\langle x''-x',\xi\rangle)^n}\,dx''dx'$$

$$= \int K(x,x'')\,g(x'',\xi,p-\langle x-x'',\xi\rangle)\,dx''.$$

$K(x,x')$ は $\psi(x,x') \in C(V_{c,\varepsilon})$ (cf. § 1.2) の同値類として表現されていると仮定できるから，このとき (2.9) を正則函数の積分として書くと（整型マイクロ函数 g, h とその定義函数を同じ文字で表わす）

$$h(x,\xi,p) = (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy_2 \cdots \oint dy_n\ \psi(x,x-y)\,g(x-y,\xi,p-\langle y,\xi\rangle)$$

ただし積分路は § 1.3, (1.10) と同じである． $h(x,\xi,p)$ の表象が積 $:P^{(1)}(x,\xi)::Q^{(1)}(x,\xi):$ の表象であるから，それを計算する．

$$\int_\Sigma h(x,\xi,p)\,e^{-p}\,dp$$

$$= (-1)^n \int_\Sigma dp \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy'\ \psi(x,x-y)\,g(x-y,\xi,p-\langle y,\xi\rangle)\,e^{-p}$$

$$= (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy'\,\psi(x,x-y)\,e^{-\langle y,\xi\rangle} \int_\Sigma g(x-y,\xi,q)\,e^{-q}\,dq$$

$$= (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy' \sum_\alpha \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!}\,\psi(x,x-y)\,e^{-\langle y,\xi\rangle} \int_\Sigma \partial_x^\alpha g(x,\xi,q)\,e^{-q}\,dq$$

$$= (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy' \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\,\partial_\xi^\alpha\left(\psi(x,x-y)\,e^{-\langle y,\xi\rangle}\right)\cdot \partial_x^\alpha \int_\Sigma g(x,\xi,q)\,e^{-q}\,dq$$

ここで $(-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy'\ \psi(x,x-y)\,e^{-\langle y,\xi\rangle} = P^{(2)}(x,\xi)$,

$$\int_\Sigma g(x,\xi,q)\,e^{-q}\,dq = Q^{(2)}(x,\xi)$$

とおくと $P^{(2)}(x,\xi) \sim P^{(1)}(x,\xi)$ （命題 1.8）, $Q^{(2)}(x,\xi) \sim Q^{(1)}(x,\xi)$ であり，さらに $W(x,\xi) = \int_\Sigma h(x,\xi,p)\,e^{-p}\,dp$ とおくと

$$W(x,\xi) = \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha P^{(2)}(x,\xi) \cdot \partial_x^\alpha Q^{(2)}(x,\xi)$$

である．右辺は β_0, β_1 を十分小さくとれば幾何級数的に収束させることができる（ただし $|\xi| \gg 1$）．よって

$$W^{(2)}(t:x,\xi) = \exp(t\partial_\xi \cdot \partial_y)\, P^{(2)}(x,\xi)\, Q^{(2)}(y,\eta) \Big|_{\substack{y=x \\ \eta=\xi}}$$

とおくと明らかに $W(x,\xi) \sim W^{(2)}(t:x,\xi)$ で，かつ $W^{(1)}(t;x,\xi) \sim W^{(2)}(t:x,\xi)$ であるから定理が示された．

<u>定理 2.13.</u>（形式共役）　$P(t:x,\xi)$ を Ω で定義された形式表象とする．

$$P^*(t:x,\xi) = \exp(-t\partial_\eta \cdot \partial_x)\, P(t:x,\eta) \Big|_{\eta=-\xi}$$

とおくと $P^*(t:x,\xi)$ は $\Omega^a = \{(x,\xi) \mid (x,-\xi) \in \Omega\}$ で定義された形式表象で

$$(:P(t;x,\xi):)^* = :P^*(t;x,\xi):$$

ただし左辺は $:P(t;x,\xi):$ の形式共役作用素 $\in \mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{a(x^*)}$ をあらわす．

<u>証明</u>　前定理の証明と同様，$P(x,\xi) \sim P(t;x,\xi)$ なる表象 $P(x,\xi)$ について示せばよい．しかも，$P(x,\xi)$ は $V_{c,\varepsilon}$（cf. § 1.2）で

正則な函数 $\psi(x, x')$ によって

$$(2.10) \quad P(x,\xi) = (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy' \, \psi(x, x-y)\, e^{-\langle y,\xi\rangle}$$

と書かれていると仮定してよい。このとき $P = :P(x,\xi):$ の形式共役 P^* は

$$P^* = [(-1)^n \psi(x', x)\, dx']$$

により定義される。よってその表象 $P^*(x,\xi)$ は

$$(2.11) \quad P^*(x,\xi) = \int_{\beta_0'}^{\beta_1'} dy_1 \oint dy' \, \psi(x-y, x)\, e^{-\langle y,\xi\rangle}$$

ただし $\beta_0' = -\beta_0$, $\beta_1' = -\beta_1$, y_1 についての積分路は β_0' を出発し, β_1' に至る原点を反時計まわりにまわる路とし, y_j については $(j \geq 2)$ (2.10) と同じ閉積分である。 $\psi(x, x-y) = \varphi(x,y)$ とおけば (2.10), (2.11) は

$$(2.10)' \quad P(x,\xi) = (-1)^n \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy' \, \varphi(x,y)\, e^{-\langle y,\xi\rangle},$$

$$(2.11)' \quad P^*(x,\xi) = \int_{\beta_0}^{\beta_1} dy_1 \oint dy' \, \varphi(x-y,-y)\, e^{-\langle y,\xi\rangle}$$

これを次のように変形する

$$\begin{aligned}
P^*(x,\xi) &= \int dy \sum_\alpha \frac{(-y)^\alpha}{\alpha!} \partial_x^\alpha \varphi(x,-y)\, e^{-\langle y,\xi\rangle} \\
&= (-1)^n \int dw \sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\eta^\alpha \partial_x^\alpha \varphi(x,w)\, e^{-\langle w,\eta\rangle}\Big|_{\eta=-\xi} \\
&= \sum_\alpha \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!} \partial_\eta^\alpha \partial_x^\alpha P(x,\eta)\Big|_{\eta=-\xi}
\end{aligned}$$

β_0, β_1 を十分小さくすればこの級数は収束し, $P^*(x,\xi) \sim P^*(t;x,\xi)$ だから定理が示された.

表象は座標のとり方に依存する. 座標をとりかえたとき, 表象がどう変化するかを記述するのが次の定理である.

定理 2.14. (座標変換) $x=(x_1,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ を X のふたつの座標系, $P(t;x,\xi)$ を Ω で定義されたはじめの座標に関する形式表象とする.

$$\tilde{P}(t;y,\eta) = \exp(t\,\partial_{x'}\cdot\partial_{\xi'})\,P(t;x,\xi' + {}^tM(x,x')\eta)\Big|_{\substack{x'=x\\ \xi'=0}}$$

とおく. ただし $y=y(x)$, $M(x,x')$ は $y(x)-y(x')=M(x,x')\cdot(x-x')$ で定まる行列とする. このとき $\tilde{P}(t;y,\eta)$ は Ω で定義された, (y,η) に関する形式表象で

$$:P(t;x,\xi):\;=\;:\tilde{P}(t;y,\eta):$$

ここに右辺は座標 (y,η) について $\tilde{P}(t;y,\eta)$ に対応する $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{X}$ の元を表わす.

証明 前のふたつの定理と同様 $P(t;x,\xi) \sim P(x,\xi)$ かつ

$$P(x,\xi) = (-1)^n \int \psi(x,x-y)\,e^{-\langle y,\xi\rangle}\,dy \;=\; \int \psi(x,x')\,e^{-\langle x-x',\xi\rangle}\,dx'$$

なる $P(x,\xi)$ $(\psi(x,x')\in \mathcal{O}(V))$ について示せば十分である．$y=y(x)$ のとき，$P = K(x,x')dx' = [\psi(x,x')dx']$ の y についての表象は

$$\tilde{P}(y,\eta) = \int \psi(x,x'')\, e^{-\langle y-y'',\eta\rangle}\, dx''$$

によって与えられる．ただし $y''=y(x'')$．以下形式的計算のみを行なう．

$$\tilde{P}(y,\eta) = \int \psi(x,x'')\, e^{-\langle y(x)-y(x''),\,\eta\rangle}\, dx''$$

$$= \int \psi(x,x'')\, e^{-\langle M(x,x'')\cdot(x-x''),\,\eta\rangle}\, dx''$$

$$= \int \psi(x,x'')\, e^{-\langle x-x'',\,{}^tM(x,x'')\eta\rangle}\, dx''$$

$$= \int \psi(x,x'') \sum_\alpha \frac{(x''-x)^\alpha}{\alpha!}\, \partial_{x'}^\alpha\, e^{-\langle x-x'',\,{}^tM(x,x')\eta\rangle}\Big|_{x'=x} dx''$$

$$= \int \psi(x,x'') \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\alpha\, e^{-\langle x-x'',\,{}^tM(x,x')\eta+\xi'\rangle} dx''\Big|_{\substack{x'=x\\ \xi'=0}}$$

$$= \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\, \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\alpha\, P(x,\,{}^tM(x,x')\eta+\xi')\Big|_{\substack{x'=x\\ \xi'=0}}$$

正当化は前2定理と同様である．

第3章　表象に対する指数法則

§3.1. 形式表象の指数函数

本節では，次節への準備として形式表象を e の肩に乗せることを考える．

定義 3.1.　$p(t;x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}t^j p_j(x,\xi)$ を T^*X の錐的開集合 Ω で定義された形式表象とする．任意の $\Omega'\subset\subset\Omega$ に対して $R>0$，$0<A<1$ なる定数 R，A が存在し，各 $h>0$ について $H>0$ を選べば，$j=0,1,2,\cdots$，$(x,\xi)\in\Omega'$，$|\xi|\geq(j+1)R$ に対して

$$(3.1)\qquad |p_j(x,\xi)|\leq A^j(h|\xi|+H)$$

となるとき $p(t;x,\xi)$ は Ω で高々 $1-0$ 階であるという．

命題 3.2.　$p(t;x,\xi)$ を T^*X の錐的開集合 Ω で定義された高々 $1-0$ 階の形式表象とする．そのとき $\exp\{p(t;x,\xi)\}$ は Ω で定義された形式表象となる．さらに Ω において $p(t;x,\xi)\sim 0$ なら $\exp\{p(t;x,\xi)\}\sim 1$ を得る．

証明　$p(t;x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}t^j p_j(x,\xi)$ とし，これが定義 3.1 の評価をみたすと仮定する．$\exp\{p(t;x,\xi)\}=\exp\{\sum t^j p_j(x,\xi)\}$ を t について展開する．

$$\exp\{p(t:x,\xi)\} = \sum_{j=0}^{\infty} t^j e_j(x,\xi)$$

ただし

(3.3) $$e_j(x,\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j_1+\cdots+j_k=j} p_{j_1}(x,\xi)\cdots\cdots p_{j_k}(x,\xi).$$

(3.2)とあわせれば

$$|e_j(x,\xi)| \leq A^j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{j+k-1}{k-1} (h|\xi|+H)^k$$

ここで

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \binom{j+k-1}{k-1} s^k = 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(j-1)!}{l!(l-1)!(j-l)!} s^l \exp s,$$

および, $h'>0$, $l=0,1,2,\cdots$ について

$$(h|\xi|+H)^l \exp(-h'|\xi|) \leq \exp\left(\frac{h'}{h}H\right)\cdot\left(\frac{h}{h'}\right)^l l!$$

が成り立つことに注意すると

$$|e_j(x,\xi)|\cdot\exp(-h'|\xi|)$$

$$\leq A^j \left(1+\frac{h}{h'}\right)^j \exp\left\{h|\xi| + H\left(1+\frac{h'}{h}\right)\right\}$$

を得る. $0<A<1$ ゆえ 各 $h'>0$ に対し, $0 < A\left(1+\frac{h}{h'}\right) < 1$ となるように h を選べる. ゆえに命題のはじめの主張は示された.

次に $p(t:x,\xi) \sim 0$ と仮定する. $p(t:x,\xi)$ が 1−0 階であるから, 任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対し, 定数 r, B で $0<r$, $0<B<1$ なるものがあって, 各 $h>0$ について $H>0$ を選べば

(3.4) $$\left|\sum_{j=0}^{m-1} p_j(x,\xi)\right| \leq B^m (h|\xi|+H)$$

が $|\xi| \geqq m\Omega$ なる $(x, \xi) \in \Omega'$ について成り立つ $(m = 1, 2, \cdots)$ ように

できる. (3.3) より

$$\sum_{j=0}^{m-1} e_j(x, \xi) - 1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{j_1 + \cdots + j_k = j} p_{j_1}(x, \xi) \cdots\cdots p_{j_k}(x, \xi)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big\{ \Big(\sum_{j=0}^{m-1} p_j(x, \xi) \Big)^k - \sum_{j=m}^{(m-1)k} \sum_{\substack{j_1 + \cdots + j_k = j \\ j_1, \cdots, j_k \leq m-1}} p_{j_1}(x, \xi) \cdots p_{j_k}(x, \xi) \Big\}.$$

よって

$$\Big| \sum_{j=0}^{m-1} e_j(x, \xi) - 1 \Big|$$

$$\leq B^m (h|\xi| + H) \exp\{(1-A)^{-1}(h|\xi| + H)\}$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=m}^{(m-1)k} \sum_{j_1 + \cdots + j_k = j} A^{j_1 + \cdots + j_k} (h|\xi| + H)^k$$

であるが, さらに

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=m}^{(m-1)k} \sum_{j_1 + \cdots + j_k = j} A^{j_1 + \cdots + j_k} (h|\xi| + H)^k$$

$$\leq A^m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big(\sum_{j=0}^{m-1} A^j \Big)^k (h|\xi| + H)^k$$

より

$$\Big| \sum_{j=0}^{m-1} e_j(x, \xi) - 1 \Big| \leq (A^m + B^m) \exp\{2(1-A)^{-1}(h|\xi| + H)\}$$

を得る $(m = 1, 2, \cdots)$. よってあとの主張も示された.

§ 3.2. Exponential Calculus

本節では指数表象（$\exp\{p(x,\xi)\}$ の形の表象）をもつ作用素に対する3つの基本的演算即ち積，形式共役，および座標変換を形式表象の指数函数として具体的に書き表わす．証明は次節で与えることにし，定理の形で与える．Ω を T^*X の錐的開集合とする．

A) 積　　$p(x,\xi)$, $q(x,\xi)$ を Ω で定義された表象とする．$\Omega\times\Omega$ で定義された表象の列 $\{w_j\}_{j=0}^{\infty}$ を次で定める．

$$
(3.5)\quad \begin{cases} w_0(x,y,\xi,\eta) = p(x,\xi)+q(y,\eta) \\ w_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi\cdot\partial_y w_j + \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\partial_\xi w_k\cdot\partial_y w_{j-k}\right) \end{cases}
$$

ただし $j=0,1,2,\cdots$, $\partial_\xi\cdot\partial_y=\sum_{\nu=1}^{n}\partial_{\xi_\nu}\partial_{y_\nu}$, $\partial_\xi w_k\cdot\partial_y w_{j-k}=\sum_{\nu=1}^{n}\partial_{\xi_\nu}w_k\,\partial_{y_\nu}w_{j-k}$, である．さらに，$\{r_j\}_{j=0}^{\infty}$ を

$$
(3.6)\quad r_j(x,\xi)=r_j(x,\xi;p,q)=w_j(x,x,\xi,\xi),\quad j=0,1,\cdots
$$

によって定める．このとき

定理 3.3.　$p(x,\xi)$, $q(x,\xi)$ が高々1-0階ならば $\sum_{j=0}^{\infty}t^j r_j(x,\xi)$ は高々1-0階の形式表象で，次の指数法則をみたす．

$$
(3.7)\quad :\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}: = :\exp\{\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x,\xi)\}:
$$

ただし，上の記述では $:\exp\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)\}:$ を $:\exp\{\sum_{j=0}^{\infty} r_j(x,\xi)\}:$ と略記した．以下でもこの記法を用いる．　さて，$p(x,\xi)$，$q(x,\xi)$の階数が真に1より小さい時は

定理 3.4.　ρを$0\leq\rho<1$なる実数とする．$p(x,\xi)$，$q(x,\xi)$がともに高々ρ階とすると，$r_j(x,\xi)$は高々$(j+1)\rho-j$階である．従って，Nを$(N+1)\rho-N\geq 0$なる最大の整数とするとき，次の条件をみたす形式表象$\sum_{k=0}^{\infty} t^k L_k(x,\xi)$が存在する：任意の$\Omega'\Subset\Omega$に対し，定数$R, C, A>0$が存在し，各$k=0,1,2,\cdots$，および$|\xi|\geq(k+1)R$なる$(x,\xi)\in\Omega'$に対し

$$|L_k(x,\xi)|\leq C A^k k!^{1-\rho}|\xi|^{-\lambda-k(1-\rho)} \tag{3.8}$$

および

$$\begin{aligned}&:\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}:\\&=:\exp\{\sum_{j=0}^{N} r_j(x,\xi)\}\{1+\sum_{k=0}^{\infty} L_k(x,\xi)\}:\end{aligned} \tag{3.9}$$

ただし　$\lambda=(N+1)-(N+2)\rho>0.$

上の定理は，$:e^p::e^q:$ の表象が $\exp(\sum_{j=0}^{N} r_j)$ で割れ，その商が $1+$(負階)となることを示している．即ち，p, qの階数が真に1より小ならば $:e^p::e^q:$ の表象の"無限階部分"をくくり出すことが出来ることを示している．

B) 形式共役　$p(x,\xi)$ を Ω で定義された表象とする．表象の列 $\{v_j\}_{j=0}^{\infty}$ および $\{p_j^*\}_{j=0}^{\infty}$ を次によって定める．

$$(3.10)\quad \begin{cases} v_0(x,\eta) = p(x,\eta) \\ v_{j+1} = -\dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\eta \cdot \partial_x v_j + \sum_{k=0}^{j} \partial_\eta v_k \cdot \partial_x v_{j-k}\right), \quad j=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

$$(3.11)\quad p_j^*(x,\xi) = v_j(x,-\xi), \quad j=0,1,2,\cdots$$

このとき

定理 3.5.　$p(x,\xi)$ が高々 1-0 階なら $\sum_{j=0}^{\infty} t^j p_j^*(x,\xi)$ は Ω^a で定義された高々 1-0 階の形式表象で

$$(3.12)\quad (:\exp\{p(x,\xi)\}:)^* = :\exp\{\sum_{j=0}^{\infty} p_j^*(x,\xi)\}:$$

ただし左辺は $:\exp\{p(x,\xi)\}:$ の形式共役作用素を表わす．

積の場合と同様，$p(x,\xi)$ の階数が 1 より真に小さいときは，

定理 3.6.　ρ を $0 \le \rho < 1$ なる実数とする．$p(x,\xi)$ が高々 ρ 階ならば $p_j^*(x,\xi)$ は高々 $(j+1)\rho - j$ 階となる．従って N を $(N+1)\rho - N \ge 0$ なる最大の整数とするとき，次の条件をみたす形式表象 $\sum_{k=0}^{\infty} t^k P_k^*(x,\xi)$ が存在する：任意の $\Omega' \Subset \Omega^a$ に対し，正定数 R, C, A が存在し，各 $k=0,1,2,\cdots$ および $|\xi| \ge (k+1)R$ なる $(x,\xi) \in \Omega'$ に対し

(3.13) $$|P_k^*(x,\xi)| \le C A^k k!^{1-\rho} |\xi|^{-\lambda-k(1-\rho)}$$

および

(3.14) $$(:\exp\{p(x,\xi)\}:)^* = :\exp\Big\{\sum_{j=0}^{N} p_j^*(x,\xi)\Big\}\cdot\Big\{1+\sum_{k=0}^{\infty} P_k^*(x,\xi)\Big\}:$$

ただし $\lambda = (N+1)-(N+2)\rho > 0$.

c) 座標変換　$x=(x_1,\cdots,x_n)$ および $y=(y_1,\cdots,y_n)$ を X のふたつの座標系とする. $p(x,\xi)$ を Ω で定義された x-座標に関する表象とする. このとき $\{u_j\}_{j=0}^{\infty}$ および $\{\tilde{p}_j\}_{j=0}^{\infty}$ を次で定義する.

(3.15) $$\begin{cases} u_0(x,x',\xi',\eta) = p(x,\xi'+{}^tM(x,x')\eta) \\ u_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\Big(\partial_{\xi'}\cdot\partial_{x'}u_j + \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\partial_{\xi'}u_k\cdot\partial_{x'}u_{j-k}\Big), \quad j=0,1,2,\cdots \end{cases}$$

(3.16) $$\tilde{p}_j(y,\eta) = u_j(x,x,0,\eta), \quad j=0,1,2,\cdots$$

ただし $y=y(x)$ とし, $M(x,x')$ は $y(x)-y(x')=M(x,x')(x-x')$ によって定まる行列, ${}^tM(x,x')$ はその転置行列を表わす.

定理 3.7. $p(x,\xi)$ が高々 1−0 階なら $\sum_{j=0}^{\infty} t^j\tilde{p}_j(y,\eta)$ は Ω で y-座標に関して定義された 1−0 階の形式表象で

(3.17) $$:\exp\{p(x,\xi)\}: \;=\; :\exp\Big\{\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{p}_j(y,\eta)\Big\}:$$

ただし右辺は y-座標に関して $\exp\{\sum_{j=0}^{\infty}\tilde{p}_j(y,\eta)\}$ に対応する作用素を表わす.

定理 3.8. ρ を $0 \le \rho < 1$ なる実数とする。もし $p(x,\xi)$ が高々 ρ 階ならば $\tilde{p}_j(y,\eta)$ は高々 $(j+1)\rho - j$ 階となる。従って N を $(N+1)\rho - N \ge 0$ なる最大の整数とするとき、次の条件をみたす形式表象 $\sum_{k=0}^{\infty} t^k \tilde{P}_k(y,\eta)$ が存在する：任意の $\Omega' \Subset \Omega$ に対し正の定数 R, C, A が存在し、各 $k = 0, 1, 2, \cdots$ および $|\xi| \ge (k+1)R$ なる各 $(x,\xi) \in \Omega'$ に対し

$$(3.18) \qquad |\tilde{P}_k(y,\eta)| \le C A^k k!^{1-\rho} |\eta|^{-\lambda - k(1-\rho)}$$

および

$$(3.19) \qquad :\exp\{p(x,\xi)\}: = :\exp\{\sum_{j=0}^{N} \tilde{p}_j(y,\eta)\}\{1 + \sum_{k=0}^{\infty} P_k(y,\eta)\}:$$

ただし $\lambda = (N+1) - (N+2)\rho > 0$.

有限階の擬微分作用素（即ち $\mathcal{E}_X$ の切断）の場合、その最高階の斉次成分（それを主表象と呼んだ）は座標変換に対し不変であるこれは良く知られているが、無限階の場合、そもそも主表象が意味を成さず、表象（主表象と区別するときは全表象ともいう）は座標不変でない。しかし、定理 3.8 によって、もし、表象の対数が 1 階未満、つまり表象の増大度が 1 未満ならば、表象の対数の"最高階部分"にあたるものは座標によらないことがわかる。

§ 3.3. 定理 3.3, 3.4 の証明

前節で述べた定理 3.3, 3.4 の証明を与える. 定理 3.5 ～ 3.8 については, 全く同様に示せるので証明は略す. 定理 2.12 より $:e^p::e^q:$ は形式表象を用いて次のように書ける.

(3.20) $$:\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}:$$

$$= :\exp(t\,\partial_\xi\cdot\partial_y)\exp\{p(x,\xi)+q(y,\eta)\}\Big|_{\substack{y=x\\ \eta=\xi}}: .$$

そこで

(3.21) $$\Pi = \exp(t\,\partial_\xi\cdot\partial_y)\exp\{p(x,\xi)+q(y,\eta)\}$$

とおく. 明らかに Π は $\hat{S}(\Omega\times\Omega)$ に属し, 次の微分方程式の一意的な解である.

(3.22) $$\begin{cases} \partial_t \Pi = \partial_\xi\cdot\partial_y \Pi, \\ \Pi\big|_{t=0} = \exp\{p(x,\xi)+q(y,\eta)\}. \end{cases}$$

この方程式の解 Π が

(3.23) $$\Pi = \exp\left\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j w_j(x,y,\xi,\eta)\right\}$$

の形に書けていると仮定しよう. すると Π が (3.22) をみたすことと

(3.24) $$\begin{cases} w_0(x,y,\xi,\eta) = p(x,\xi)+q(y,\eta) \\ w_{j+1} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi\cdot\partial_y w_j + \displaystyle\sum_{k=0}^{j}\partial_\xi w_k\cdot\partial_y w_{j-k}\right) \end{cases}$$

$(j=0,1,2,\cdots)$ は同値となる. $r_j(x,\xi)=w_j(x,x,\xi,\xi)$ とおいたから, (3.20) より

$$:\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{q(x,\xi)\}:=:\exp\{\sum_{j=0}^{\infty}t^j r_j(x,\xi)\}:$$

であることがわかる. もともと $\exp\{\sum_{j=0}^{\infty}t^j r_j(x,\xi)\}$ は定理 2.12 により形式表象である. しかし $\sum_{j=0}^{\infty}t^j r_j(x,\xi)$ 自身が形式表象かどうかは自明なことではない. $\sum_{j=0}^{\infty}t^j r_j(x,\xi)$ が形式表象となることを示す為に, 次の補題を用いる.

<u>補題 3.9.</u> 定数 $c>0$ が存在してすべての $j=1,2,3,\cdots$ および $\nu=1,2,\cdots,j$ に対し

$$(3.25)\quad \frac{1}{j+1}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu+1}(k+1)^{k-\mu-2}\cdot(j-k+1)^{j-k-\nu+\mu-1}$$

$$\leq c\,(j+1)^{j-\nu-2}.$$

この補題は, ごく初等的な評価だけで証明できる ([4] 参照) ので証明は省略する.

今, $\{w_j^{(\nu)}\}$ $(j=0,1,2,\cdots,\ \nu=0,1,\cdots,j)$ を次の漸化式により定める.

$$(3.26)\begin{cases} w_0^{(0)} = w_0(x,y,\xi,\eta) = p(x,\xi)+q(y,\eta), \\ w_{j+1}^{(\nu)} = \dfrac{1}{j+1}\left(\partial_\xi\cdot\partial_y w_j^{(\nu)} + \displaystyle\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\sum_{k=\mu}^{j-\nu+\mu+1}\partial_\xi w_k^{(\mu)}\cdot\partial_y w_{j-k}^{(\nu-\mu-1)}\right) \end{cases}$$

ただし $\nu > j$ のとき $w_j^{(\nu)} \equiv 0$，および $j > 0$ について $w_j^{(0)} \equiv 0$ とする．このとき，$w_j = \sum_{\nu=0}^{j} w_j^{(\nu)}$ である $(j = 0,1,2,\cdots)$．また $r_j^{(\nu)}(x,\xi) = w_j^{(\nu)}(x,x,\xi,\xi)$ とおくと $r_j = \sum_{\nu=0}^{j} r_j^{(\nu)}$ である．

$$\tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda}(\xi,\eta) = \sup\{|p(x,\xi)| + |q(y,\eta)| ;\ x, y \in \pi(\Omega)\},$$

$$\Lambda = \Lambda(\xi) = \tilde{\Lambda}(\xi,\xi)$$

とおく．ただし $\pi : T^*X \to X$ は自然な射影．Ω をあらかじめ十分小さくとっておけば $\tilde{\Lambda}$，Λ は定義できて，$\lim_{|\xi|,|\eta|\to\infty} \tilde{\Lambda}(\xi,\eta)/(|\xi|+|\eta|) = 0$ をみたす．これらの記号のもとに

__命題 3.10.__ 定数 $B > 0$ が存在し，各 $\Omega' \Subset \Omega$ および各 $j = 0,1,2,\cdots;\ \nu = 0,1,\cdots,j$ に対し

(3.27) $$|w_j^{(\nu)}(x,y,\xi,\eta)| \leq B^j (j+1)^{j-\nu-3} \varepsilon^{-2j} \tilde{\Lambda}^{\nu+1} |\xi|^{-j},$$

ただし $(x,y,\xi,\eta) \in \Omega' \times \Omega'$

および

(3.28) $$|r_j^{(\nu)}(x,\xi)| \leq B^j (j+1)^{j-\nu-3} \varepsilon^{-2j} \Lambda^{\nu+1} |\xi|^{-j},$$

ただし $(x,\xi) \in \Omega'$

が成り立つ．ε は $|\xi| = 1$ 上 Ω' から $\partial\Omega$ に到る距離である．

__証明.__ j についての帰納法．$j = 0$ については明らかである．

$k \le j$ なるすべての k と各 $\nu \le k$ について命題が成立すると仮定し，$j+1$，$\nu \le j+1$ について示す．Ω'' を Ω' の $\varepsilon/(k+2)$-近傍（ただし，ファイバー方向は $|\xi|=1$ 上で距離を測る）とする．Ω'' について帰納法の仮定を用いて，$w_k^{(\mu)}$ （$k \le j$，$\mu \le k$）の導函数を評価する．Ω'' と $\partial\Omega$ の距離は $(1-\frac{1}{k+2})\varepsilon$ 以上であるから，Cauchy の評価式により各 $(x, y, \xi, \eta) \in \Omega' \times \Omega'$ および $i = 1, \cdots, n$ に対し

$$(3.29) \quad |\partial_{\xi_i} w_k^{(\mu)}(x, y, \xi, \eta)|$$

$$\le (k+2)(\varepsilon|\xi|)^{-1} B^k (k+1)^{k-\mu-3} ((1-\frac{1}{k+2})\varepsilon)^{-2k} \cdot \tilde{\Lambda}^{\mu+1} |\xi|^{-k}$$

$$\le 2e^2 B^k (k+1)^{k-\mu-2} \varepsilon^{-2k-1} \tilde{\Lambda}^{\mu+1} |\xi|^{-k-1}.$$

同様に

$$(3.30) \quad |\partial_{y_i} w_k^{(\mu)}(x, y, \xi, \eta)|$$

$$\le 2e^2 B^k (k+1)^{k-\mu-2} \varepsilon^{-2k-1} \tilde{\Lambda}^{\mu+1} |\xi|^{-k},$$

$$(3.31) \quad |\partial_{\xi_i} \partial_{y_i} w_k^{(\mu)}(x, y, \xi, \eta)|$$

$$\le 4e^2 B^k (k+1)^{k-\mu-1} \varepsilon^{-2k-2} \tilde{\Lambda}^{\mu+1} |\xi|^{-k-1}.$$

これら評価を用いて（3.26）の右辺を評価し，補題 3.9 を用いると

$$|w_{j+1}^{(\nu)}(x, y, \xi, \eta)|$$

$$\le 4n(e^2+ce^4) B^j (j+2)^{j-\nu-2} \varepsilon^{-2j-2} \tilde{\Lambda}^{\nu+1} |\xi|^{-j-1}$$

となる。あらかじめ B を $4n(e^2+ce^4)$ より大きくとっておけば $j+1$ について (3.27) が示された。(3.28) は，(3.27) において $y=x$，$\eta=\xi$ とすればよい。

いよいよ，$\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)$ が形式表象となることを証明しよう。$r_j(x,\xi) = \sum_{\nu=0}^{j} r_j^{(\nu)}(x,\xi)$ であるから，命題 3.10 によって，各 $(x,\xi)\in\Omega'$ に対して

$$(3.32)\quad |r_j(x,\xi)| \leq (B\varepsilon^{-2})^j \sum_{\nu=0}^{j} (j+1)^{j-\nu-3} (\Lambda\cdot|\xi|^{-1})^{\nu} \Lambda\cdot|\xi|^{-j+\nu}$$

従って，$|\xi| \geq (j+1)R \quad (R \gg 1)$ とすると

$$(3.33)\quad |r_j(x,\xi)| \leq (B\varepsilon^{-2}R^{-1})^j \sum_{\nu=0}^{j} (\Lambda|\xi|^{-1}R)^{\nu}\cdot\Lambda.$$

$0 < B\varepsilon^{-2}R^{-1} < 1$ に R を選ぶことができる。また，$\lim_{|\xi|\to\infty} \Lambda(\xi)\cdot|\xi|^{-1} = 0$ だから，$\sum_{\nu=0}^{j}(\Lambda(\xi)|\xi|^{-1}R)^{\nu}$ は $|\xi| \geq (j+1)R$ で有界である。従って各 $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対し，$R>0$，$0<A<1$，$C_1>0$ なる定数が存在し，各 $(x,\xi)\in\Omega'$，$|\xi|\geq(j+1)R$，$j=0,1,2,\cdots$ に対し

$$(3.34)\quad |r_j(x,\xi)| \leq C_1 A^j \Lambda(\xi)$$

という評価が得られた。よって定理 3.3 は示された。

次に定理 3.4 を示そう。この場合，任意の $\Omega' \subset\subset \Omega$ に対して，正の

定数 A_1, R が存在し, $\Lambda(\xi)\cdot|\xi|^{-1} \le A_1|\xi|^{-(1-\rho)}$ が $|\xi|\ge R$ なる $(x,\xi)\in\Omega'$ に対して成り立つ. このことと (3.32) をあわせれば, 定数 C_2, $A_2>0$ が存在し, 任意の j と $|\xi|\ge(j+1)R$ なる $(x,\xi)\in\Omega'$ に対し

$$(3.35)\quad |r_j(x,\xi)| \le C_2 A_2^j (j+1)^{(1-\rho)j-3} |\xi|^{-(1-\rho)j}\Lambda(\xi).$$

よって定理 3.4 のはじめの主張は示された. あとの主張を示そう. 形式表象 $\sum_{k=0}^{\infty} t^k L_k(x,\xi)$ を

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k L_k(x,\xi) = \exp\{\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_{N+j+1}(x,\xi)\}-1$$

によって定める. すると (3.3) と同様に

$$L_0(x,\xi) = \exp\{r_{N+1}(x,\xi)\}-1,$$

$$L_k(x,\xi) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l!}\sum_{j_1+\cdots+j_l=k} r_{N+j_1+1}(x,\xi)\cdots\cdots r_{N+j_l+1}(x,\xi)$$

ただし $k>0$

を得る. これに各 r_j の評価をあわせれば, Stirling の公式に注意して, 評価 (3.8) が得られる. 最後に (3.9) を示さなければならないが, それは $\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_j(x,\xi)$ と $\sum_{j=0}^{N} r_j(x,\xi)+\sum_{j=0}^{\infty} t^j r_{N+j+1}(x,\xi)$ が同値であることと, 命題 3.2 から明らか. よって定理 3.4 が証明できた.

§ 3.4. 応用：無限階作用素の可逆性

有限階の擬微分作用素の可逆性は，作用素の主表象が消えないという条件の下で保証される．しかし無限階の場合は，主表象が意味を成さないから，この条件をそのまま拡張するわけにはいかない．定数係数無限階微分作用素の可逆性（解析的楕円性）の考察は河合[15]で行なわれた．そこでは，微分作用素の（全）表象の零点が，ある方向の無限遠に集積しなければ，その方向では超局的に楕円性を持つことが示されている．この条件とて，整型超局所作用素の場合にそのまま拡張はできない．何故なら，表象が零点を持たなくとも，零作用素を定義する場合があるからである．そこで我々は，表象の逆がまた表象となるという条件から出発し，可逆性を考察する．増大度 1 未満の表象を考える限り，この条件下で可逆であることが，定理 3.4 の応用として示せる．

定理 3.11. ρ を $0 \le \rho < 1$ なる実数とする．$P(x,\xi)$ を Ω で定義された増大度高々 ρ（cf. 定義1.10）の表象とする．$1/P(x,\xi)$ がまた，Ω で定義された増大度高々 ρ の表象であると仮定すると，$P = :P(x,\xi):$ は $\mathcal{E}^{\mathbb{R}}_{x^*}$ において可逆となり，逆の増大度も高々 ρ である．

証明　$p(x,\xi) = \log P(x,\xi)$ とおくと $p(x,\xi)$ は Ω において高々 m 階である．形式表象の列 $\{\sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$

および表象の列 $\{u^{(k)}\}_{k=1,2,\cdots}$ を次で定める。まず

$$u_j^{(1)}(x,\xi) = r_j(x,\xi;p,-p) \quad , j=0,1,2,\cdots$$

ただし r_j は (3.6) で定められたものである。$u_j^{(1)}(x,\xi)$ は定理3.4により $(j+1)p-j$ 階であり，更に $u_0^{(1)}(x,\xi)\equiv 0$ である。従って $\sum_{j=1}^{\infty} t^j r_j^{(1)}(x,\xi)$ は高々 $2p-1$ 階（形式表象の階数の定義は一般的には与えなかったが，意味は明らかであろう）となる。従って高々 $2p-1$ 階の表象 $u^{(1)}(x,\xi)$ で

$$u^{(1)}(x,\xi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(1)}(x,\xi)$$

なるものが存在する。このとき

$$:\exp\{p(x,\xi)\}::\exp\{-p(x,\xi)\}: = :\exp\{u^{(1)}(x,\xi)\}:$$

である。さて，$u^{(k)}$ が定められたとするとき，

$$u_j^{(k+1)}(x,\xi) = r_j(x,\xi;u^{(k)},-u^{(k)})$$

とおくと，$u_0^{(k+1)}(x,\xi)\equiv 0$ である。$u^{(k+1)}(x,\xi)$ を

$$u^{(k+1)}(x,\xi) \sim \sum_{j=1}^{\infty} t^j u_j^{(k+1)}(x,\xi)$$

なる表象として定める。このとき

$$:\exp\{u^{(k)}(x,\xi)\}::\exp\{-u^{(k)}(x,\xi)\}: = :\exp\{u^{(k+1)}(x,\xi)\}:$$

が成りたつ。$u^{(k)}(x,\xi)$ が高々 $2^k p-(2^k-1)$ 階となることは容易

にわかる．従って，m を $2^m p-(2^m-1)\geq 0$ なる最大の整数とすれば

$$:\exp u^{(m+1)}: = :\exp p::\exp(-p)::\exp(-u^{(1)}):\cdots:\exp(-u^{(m)}):$$

であり，かつ $u^{(m+1)}(x,\xi)$ は高々 0 階である．このとき $\exp u^{(m+1)}$ も高々 0 階であるから，その正規積 $:\exp u^{(m+1)}:$ の逆

$$T = (:\exp u^{(m+1)}(x,\xi):)^{-1}$$

は容易に構成できる（cf. [2], Th 3.1.1）．よって

$$Q = :\exp(-p)::\exp(-u^{(1)}):\cdots:\exp(-u^{(m)}):T$$

とおくと $PQ=1$ をみたす．同様に P の左逆も構成できる．左右両逆が存在すれば，それらが一致することは明らかだから，P は逆を持つ．Q が増大度高々 ρ であることは明らか．

<u>例 3.12.</u>　$P = :\exp x\sqrt{\xi}: = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}(\sqrt{D_x})^k$ とするとき

$$P^{-1} = :\exp(-x\sqrt{\xi}):(:\exp\{x(1+\sqrt{1-1/\sqrt{\xi}})\}:)^{-1}$$

ただし $:\exp(-x\sqrt{\xi}): = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-x)^k}{k!}(\sqrt{D_x})^k$．右辺の第 2 因数は高々 0 階であることに注意．

文　献

[1] T. Aoki, Growth order of microdifferential operators of infinite order, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec IA, 29 (1982), 143-159.

[2] ———, Invertibility for microdifferential operators of infinite order, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 18 (1982) に発表予定.

[3] ———, The exponential calculus of microdifferential operators of infinite order I, II. Proc. Japan Acad. 58A (1982), I : 58-61, II : 154-157.

[4] ———, Calcul exponentiel des opérateurs microdifférentiels d'ordre infini, I. 発表予定

[5] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels analytiques et opérateurs d'ordre infini, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 22.3 (1972), 229-268

[6] ———, Opérateur pseudo-différentiels analytiques d'ordre infini, Astérisque, 2-3 (1973), 128-134.

[7] G.G. Braichev, Solvability of partial differential equations of infinite order in certain classes of entire functions, Math. Notes 19 (1976), 135-140.

[8] L. Gruman, The growth of entire solutions of differential equations of infinite order, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 22.1 (1972), 211-238.

[9] L. Hörmander, Fourier integral operators I, Acta Math., 127 (1971), 79-183.

[10] R. Ishimura, Théorèmes d'existence et d'approximation pour les équations aux dérivées partielles linéares d'ordre infini, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 16 (1980), 393-415.

[11] M. Kashiwara, Systèmes d'équations micro-différentielles, Cours rédigé par Teresa Monteiro-Fernandes, Prépublications math. de l'Université de Paris-Nord, 1977

[12] M. Kashiwara and T. Kawai, On holonomic systems of micro-differential equations III, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 17 (1981), 813-979.

[13] K. Kataoka, 超函数のラドン変換とその応用について, 東京大学修士論文, 1976.

[14] ———, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA, 28 (1981), 331-413.

[15] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its applications to partial differential equations with constant coefficients, ibid., 17 (1970), 467-517.

[16] T. Kawai and A. Kaneko, 超函数と定数係数線型偏微分方程式論, 数学 25-3 (1973), 239-253.

[17] M. G. Khaplanov, Linear differential equations of infinite order with analytic coefficients, Dokl. Acad. Nauk SSSR, 105-6 (1955), 1162-1165.

[18] Y. F. Korobeinik, Investigations of differential equations of infinite order with polynomial coefficients by means of operator equations of integral type, Matem. Sb., 49-2 (1959), 191-206.

[19] B. Malgrange, Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, Ann. Inst. Fourier 6 (1955), 271-355.

[20] A. Martineau, Equations différentielles d'ordre infini, Colloque C. B. R. M., 1964, pp. 37-47.

[21] ———, Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes, Math. Annalen, 163 (1966), 62-88.

[22] ——, Equations différentiells d'ordre infini, Bull. Soc. math. France, 95 (1967), 109-154.

[23] J. F. Ritt, On a general class of linear homogeneous differential equations of infinite order with constant coefficients, Transactions of AMS 18 (1917), 27-49.

[24] M. Sato, Pseudo-differential equations and theta functions, Astérisque, 2-3 (1973), 286-291.

[25] M. Sato, M. Kashiwara, and T. Kawai, Linear differential equations of infinite order and theta functions, to appear.

[26] M. Sato, T. Kawai, and M. Kashiwara, Microfunctions and pseudo-differential equations, Lect. Notes in Math., No. 287, Springer, pp. 265-529 (1973).

[27] K. Uchikoshi, Microlocal analysis of partial differential operators with irregular singularities, Proc. Japan Acad., 57-A (1981), 485-487.

[28] ——, Microlocal analysis of partial differential operators with irregular singularities, to appear.

[29]. M. G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre infini et a coefficients constants, Ann. École Norm. Sup. 46 (1929), 25-53.

《目 次》